



**Sérgio dos Santos
Barreto**

Análise e Modelização de Problemas de Localização-Distribuição

Co-financiado pelo Fundo Social Europeu. Entidade responsável pela divulgação e gestão: Instituto Superior de Contabilidade e Administração da Universidade de Aveiro.





**Sérgio dos Santos
Barreto**

**Análise e Modelização de Problemas de
Localização-Distribuição**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Gestão Industrial, realizada sob a orientação científica do Doutor Carlos Ferreira, Professor Associado do Departamento de Economia, Gestão e Engenharia Industrial da Universidade de Aveiro e co-orientação científica do Doutor José Pinto Paixão, Professor Catedrático do Departamento de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

O júri

Presidente:

Professor Doutor Artur Manuel Soares da Silva

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro, por delegação da Reitora da Universidade de Aveiro

Vogais:

Professor Doutor João Carlos Namorado Clímaco

Professor Catedrático da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

Professor Doutor José Manuel Pinto Paixão (Co-orientador)

Professor Catedrático da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Professor Doutor Joaquim José Borges Gouveia

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Daniel Serra de La Figuera

Professor Catedrático da Universidade Pompeu Fabra, Espanha

Prof. Doutor José Fernando da Costa Oliveira

Professor Associado da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutor Carlos Manuel Santos Ferreira (Orientador)

Professor Associado da Universidade de Aveiro

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais

Manuel Barreto

Maria Augusta

Agradecimentos

Ao Prof. Carlos Ferreira que orientou pacientemente este trabalho. Agradeço a sua disponibilidade, os conhecimentos que me transmitiu e a forma hábil como conduziu a investigação.

Ao Professor José Pinto Paixão pela sua co-orientação e dedicado acompanhamento que tem disponibilizado desde há longos anos.

Aos colegas do ISCA-UA e, em especial aos da área de matemática pelo seu incentivo.

Agradeço aos órgãos dirigentes do ISCA-UA pelo apoio que deram a este projecto e pelas condições de trabalho que proporcionaram.

À Sr^a Maximina Marieiro, Técnica de Informática do ISCA-UA, pela sua incansável ajuda, salvando situações de “teimosia” computacional vezes sem conta.

Ao Eng^o Filipe Trancho (Gabinete de Gestão de Informação da Universidade de Aveiro) pela sua preciosa ajuda em alguns aspectos relacionados com a programação.

A todos os colegas que, quando solicitados, colaboraram sem reserva, enviando artigos, teses ou trocando experiências de investigação.

Aos meus familiares que compreenderam a ausência e criaram sempre as melhores condições para o sucesso desta missão.

Aos meus filhos Pedro, Ricardo e Sofia e, em especial, à minha mulher, Maria da Luz. Sem o seu suporte provavelmente não estaria a escrever estas linhas. Com a sua ajuda diária, o seu carinho permanente e amor incondicional contribuíram decisivamente para este trabalho. Agradeço-lhes profundamente.

Resumo

Uma investigação sobre a abordagem integrada de Problemas de Localização e Distribuição é o objecto de estudo desta Tese. A localização-distribuição está presente na vida diária das pessoas, empresas e países, em tomadas de decisão que, frequentemente, devido à sua complexidade, exigem modelos fiáveis que as possam apoiar. O enquadramento logístico da Localização-Distribuição, a visualização histórica dos progressos da investigação em Problemas de Localização-Distribuição, a sua definição, modelização e resolução são temas abordados neste trabalho, propondo em cada etapa soluções que se pretende sejam simplificadoras e inovadoras.

A tese está dividida em duas partes. A primeira tem por fim efectuar uma abordagem genérica sobre Problemas de Localização-Distribuição, identificados como parte de um sistema logístico mais vasto. Como consequência de uma revisão bibliográfica intensiva e anotada, os documentos dedicados ao estudo de Problemas de Localização-Distribuição são organizados segundo um esquema que, por um lado, revela as tendências de investigação, por outro, sugere a emergência de sub-áreas como a de Localização-Distribuição com Caminhos. No seguimento desta fundamentação geral é ainda proposta uma taxonomia de base posicional e apresentado um estudo comprovativo da natureza de complexidade NP-completa deste tipo de problemas.

A segunda parte da tese inicia-se com a definição de um Problema de Localização-Distribuição com Capacidade que integra as características teóricas mais elementares da localização e distribuição e, em simultâneo, representa muitas das aplicações práticas deste tipo de problemas. Este apelo à máxima simplicidade de definição tem como objectivo a criação de um modelo de referência na área dos Problemas de Localização-Distribuição que possa servir de base de trabalho sólida para a restante investigação. A construção de modelos matemáticos com dois e três índices para o caso orientado e não orientado é a tarefa que se segue. Apesar da extraordinária complexidade destes problemas, é proposto um algoritmo de resolução exacta que permite resolver alguns problemas de pequena dimensão e obter limites inferiores para problemas maiores. A integração de diversas técnicas de agrupamento na construção de algoritmos heurísticos conduziu à avaliação das potencialidades dos métodos hierárquicos e não hierárquicos, assim como de várias medidas de proximidade. A pesquisa de algoritmos eficientes para resolução do Problema de Localização-Distribuição com Capacidade mostra, mais uma vez, que é no cruzamento de duas áreas científicas aparentemente distintas, Análise de Grupos e Investigação Operacional, que pode ser encontrada a oportunidade de investigação que esta tese relata.

Abstract

An investigation about the integrated approach of Location and Routing Problems is the object of study of this thesis. The location-routing is present in the daily life of people, companies and countries, as well as in decision-taking that frequently, due to its complexity, demands relying models to support them. The logistic framing of Location-Routing, the historical visualization of the research progress in Location-Routing Problems, its definition, mathematical models and resolution are subjects to be dealt with in this work, considering in each stage solutions intended to be simple and innovative. The thesis is divided in two parts. The first one has the purpose of carrying out a generic approach on Location-Routing Problems, identified as part of a vaster Logistic System. As consequence of an intensive and annotated bibliographical revision, the documents dedicated to the study of Location-Routing Problems are organized according to a scheme that on the one hand discloses the research trends and on the other suggests the emergency of sub-areas such as that of Location-Routing with chains. In the pursuing of this general goal, it is also proposed a positional base taxonomy and presented a confirming study of NP-complete nature of this type of problems.

The second part of the thesis starts with the definition of a Location-Routing Problem with Capacity that integrates the more elementary theoretical characteristics of the localization and distribution and, simultaneously, represents many of the practical applications. This appeal to the maximum simplicity of definition has the purpose of creating a reference model in the area of the Location-Routing Problem that can serve as a set of solid working rules for the remaining study. The construction of mathematical models with two and three indexes for the oriented and non-oriented cases is the task that follows. Despite the extraordinary complexity of these problems, it is proposed an exact algorithm that allows for the resolution of some small dimensional problems and for the obtaining of lower bounds for bigger problems. The integration of diverse clustering techniques in the construction of heuristic algorithms leads to the evaluation of the potentiality of the hierarchical and non-hierarchical methods, as well as to some measures of proximity. The search for efficient algorithms to solve the Location-Routing Problem with Capacity shows, one more time, that it is in the crossing of two apparently distinct scientific areas, Operational Research and Cluster Analysis, that the inquiry chance presented in this thesis can be found.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Motivações	2
1.2	Estrutura da Tese	4
1.3	Principais Contribuições	5
I	Aspectos Gerais	7
2	A Logística da Localização-Distribuição	9
2.1	Introdução	9
2.2	Sistemas Logísticos	9
2.2.1	Modelos de Apoio à Decisão Logística	11
2.2.2	Componentes da Logística	12
2.2.3	Actividades Logísticas	13
2.3	A LD no Sistema Logístico Empresarial	15
2.3.1	Decisões de Localização	15
2.3.2	Decisões de Distribuição	19
2.3.3	Sistemas de LD	24
2.4	A LD Numa Perspectiva Mais Abrangente	28
2.4.1	A União Europeia e as Políticas de LD	28
2.4.2	Estratégias de <i>Marketing</i> Apoiadas na LD	30
2.5	Síntese	32
3	Revisão Bibliográfica Anotada	35
3.1	Artigos	35
3.1.1	Classificação dos Artigos	36
3.1.2	Bibliografia Anotada	37
3.2	Outras Publicações	70
3.3	Síntese	71
4	Complexidade e uma Taxonomia para o PLD	73
4.1	Uma Taxonomia para o PLD	73

4.1.1	Introdução	73
4.1.2	Metodologia	74
4.1.3	Classificação Principal dos PLD	75
4.1.4	Características Complementares	80
4.1.5	Organização e Formalização das Classificações	82
4.2	Sobre a Complexidade do PLD	87
4.2.1	Introdução	87
4.2.2	Noções Prévias	88
4.2.3	Complexidade do PLD	89
4.2.4	A Classe NP-Difícil	93
4.3	Síntese	94
II	PLD com Capacidade	95
5	Em Busca de um PLD Representativo	97
5.1	Introdução	97
5.2	PLD Simples <i>versus</i> PLD com Capacidade	97
5.2.1	Formulação Matemática do PLD Simples	97
5.2.2	Formulação Matemática do PLD com Capacidade	101
5.3	Relação Entre Custos de Distribuição e de Localização	106
5.3.1	Introdução	106
5.3.2	Argumentação Prática	112
5.4	Síntese	115
6	Modelos Matemáticos para o PLDC	117
6.1	Introdução	117
6.2	Fundamentos	119
6.2.1	Problema do Caixeiro Viajante	119
6.2.2	Problema de Localização-Afectação	121
6.2.3	Problema de Localização-Afectação com Capacidade	122
6.3	Formulações para o PLD com Capacidade	123
6.3.1	Formulações com 2 Índices	125
6.3.2	Formulações com 3 Índices	132
6.4	Síntese	137
7	Resolução Exacta do PLDC	139
7.1	Introdução	139
7.2	Algoritmo Exacto	140
7.3	Resultados Computacionais	144
7.3.1	Instâncias do PLDC	144

7.3.2	<i>Software</i> de Apoio	145
7.3.3	Análise de Resultados	147
7.4	Síntese	150
8	Resolução Heurística do PLDC	153
8.1	Introdução	153
8.1.1	Recurso à Análise de Grupos	155
8.1.2	Medidas de Proximidade Entre Grupos	160
8.2	Algoritmo Heurístico Baseado na Análise de Grupos	164
8.3	Passo1: Construir Grupos com Limite de Capacidade	167
8.3.1	Métodos Hierárquicos	168
8.3.2	Métodos Não Hierárquicos	179
8.3.3	Efeito de <i>Biased</i>	183
8.4	Passo 2: Determinar as Rotas de Distribuição	186
8.5	Passo 3: Melhorar as Rotas	188
8.6	Passo 4: Localizar os CA e Afectar as Rotas.	190
8.7	Avaliação das Heurísticas	193
8.7.1	Confronto Interno	194
8.7.2	Confronto Externo	217
8.8	Síntese	222
9	Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras	225
A	Descrição dos Ficheiros de Dados	229
A.1	Introdução	229
A.2	Ficheiros de Dados	235
B	Melhor Solução Conhecida	277
C	Revisão Bibliográfica - complementos	307
C.1	Bibliografia Por Ordem Cronológica	307
C.2	Bibliografia Por Autor	312
C.3	Bibliografia Por Meio de Comunicação	317
D	Resolução do PLDC com base em formulações com 3 índices	321

Lista de Figuras

2.1	Sistema logístico empresarial. Fonte [70].	12
2.2	Etapas decisórias relacionadas com a escolha da localização de uma fábrica. Fonte [37].	17
2.3	Sistema de distribuição empresarial mais comum, na tipologia de três níveis. Fonte [127].	19
2.4	Custo de distribuição num sistema de distribuição empresarial. Fonte [70].	20
2.5	Função representativa do nível de satisfação dos clientes. Fonte [70]. . .	21
2.6	Distribuição num sistema logístico empresarial de 4 níveis com 3 categorias de percursos.	23
2.7	Componentes de um percurso de distribuição (rota) segundo proposta de Perl [176].	24
2.8	Representação da intermobilidade no Livro Branco para a política Europeia de transportes.	29
2.9	Figura usada pela Agência para o Investimento Francesa para realçar a centralidade face à Europa.	32
3.1	Mapa de organização dos textos sobre PLD.	38
4.1	Processo de desenvolvimento de um PLD.	75
4.2	Sistema de localização-distribuição com 3 níveis.	76
4.3	Características principais de um PLD.	79
5.1	Exemplo de um PLD com dois níveis e possível solução.	100
5.2	Custos de um sistema de distribuição. Fonte [171].	107
5.3	Custos (em biliões de dólares) imputáveis à logística nos Estados Unidos da América em 1990. Fonte [124].	109
5.4	Custos da distribuição logística no caso de uma empresa de alta tecnologia (em milhões de dólares). Fonte [190].	111
6.1	Rota cumprindo todas as restrições excepto as de eliminação de sub-rotas.	134
7.1	Resolução computacional do PLDC - quadro inicial.	146

7.2	Resolução computacional do PLDC - quadro intermédio.	147
7.3	Resolução computacional do PLDC - quadro final.	148
7.4	Percentagem de restrições acrescentadas.	150
8.1	Classificação dos métodos heurísticos para resolução de PLD.	154
8.2	Árvore representativa dos vários tipos de classificação. Fonte [110]. . . .	156
8.3	Representação gráfica das 150 maiores cidades europeias e 10 potenciais CA. Fonte [58].	158
8.4	Medida de proximidade do tipo <i>saving</i>	162
8.5	Métodos de agrupamento e medidas de proximidade.	168
8.6	Critérios de inserção.	187
8.7	Custo após aplicação dos passos 2, 3 e 4 do algoritmo 2.	200
8.8	Taxas de sucesso nas várias versões do algoritmo.	202
8.9	Taxas de sucesso em cada medida de proximidade.	203
8.10	Taxas de sucesso em cada par (algoritmo, medida de proximidade). . . .	204
8.11	Taxa de sucesso simples em cada par (algoritmo, medida de proximidade).	205
8.12	Taxa de sucesso com 2% de tolerância em cada par (algoritmo, medida de proximidade).	205
8.13	Taxa de sucesso com 5% de tolerância em cada par (algoritmo, medida de proximidade).	206
8.14	Projectção no plano 1x2 (representando cerca de 80% da informação ini- cial) de uma AFC efectuada sobre a tabela 8.6.	207
8.15	Projectção no plano 1x2 (representando cerca de 94% da informação ini- cial) de uma ACP efectuada sobre a tabela 8.6.	207
8.16	Desvio médio da melhor solução conhecida.	210
8.17	Resultados médios obtidos a partir dos dados uniformizados.	214
8.18	Solução não admissível da instância 8 (Christofides69-75x10), correspon- dente ao limite inferior 744,7.	219
8.19	Solução não admissível da instância 9 (Christofides69-100x10), corres- pondente ao limite inferior 788,6.	219
A.1	Representação no plano dos clientes referentes aos dados do ficheiro Gas- kell67Cli36x5.	232
C.1	Número de publicações anuais.	313
C.2	Número de publicações por década.	313
C.3	Número de publicações nas principais revistas.	320
D.1	Resolução do PLDC com base na formulação <i>PLDC.3i.no</i> - quadro final.	323

Lista de Tabelas

2.1	Actividades logísticas.	13
2.2	Decisões de localização, transporte e inventário de acordo com o seu nível hierárquico.	14
2.3	Factores que podem influenciar as decisões de localização.	16
4.1	Características explícitas e implícitas dos PLD.	80
4.2	Características complementares de um PLD.	81
4.3	Características posicionais taxonómicas dos PLD.	86
5.1	Dados essenciais à definição de um PLD discreto com 2 níveis.	101
5.2	Custos da logística em termos de percentagem das vendas.	108
5.3	Variação do número de CA com o custo de distribuição.	112
5.4	Características de três instância do PLD.	113
5.5	Variação do número de CA instalados face ao custo de instalação.	114
6.1	Formulações mais significativas para os PLDC.	118
6.2	Índices em cada conjunto.	125
6.3	Dimensão das relaxações do PLDC resolvidas.	137
7.1	Instâncias do PLDC.	145
7.2	Resultados relativos à resolução exacta de PLDC.	149
8.1	Representação gráfica e analítica das medidas de proximidade entre grupos.	163
8.2	Resultados obtidos com o algoritmo V1.	196
8.3	Resultados obtidos com o algoritmo V2.	197
8.4	Resultados obtidos com o algoritmo V3.	198
8.5	Resultados obtidos com o algoritmo V4.	199
8.6	Descrição do sucesso em cada par (algoritmo, medida de proximidade).	201
8.7	Desvio relativo face à Melhor Solução Conhecida.	209
8.8	Limites inferiores e superiores do valor da solução óptima.	220
A.1	Ficheiros de clientes. Origem dos dados de acordo com os autores.	230
A.2	Ficheiros de CA. Origem dos dados de acordo com os autores.	230

A.3	Formato e tipo dos ficheiros de clientes.	231
A.4	Informação relativa aos ficheiros de clientes.	232
A.5	Formato dos ficheiros de potenciais CA.	233
A.6	Descrição dos dados relativos aos CA.	234
C.1	Número de publicações por autor.	318
C.2	Número de artigos por meio de publicação.	319

Lista de Acrónimos

AFC	Análise Factorial de Correspondências
ACP	Análise de Componentes Principais
CA	Centro/s de Acção
CT	Medida de proximidade Centróide
LC	Medida de proximidade Ligação Completa
LD	Localização-Distribuição
LS	Medida de proximidade Ligação Simples
MG	Medida de proximidade Média de Grupo
MSC	Melhor Solução Conhecida
PCV	Problema/s do Caixeiro Viajante
PI	Programação Inteira
PL	Programação Linear
PLA	Problema/s de Localização-Afectação
PLAC	Problema/s de Localização-Afectação com Capacidade
PLCV	Problema/s de Localização do Caixeiro Viajante
PLD	Problema/s de Localização-Distribuição
PLDC	Problema/s de Localização-Distribuição com Capacidade
PLI	Programação Linear Inteira
PRV	Problema/s de Rotas de Veículos
RTLP	<i>Round-Trip Location Problem</i>
SA	Medida de proximidade <i>Saving</i>
WA	Medida de proximidade Ward

Capítulo 1

Introdução

Por todo o mundo assiste-se ao esgrimir de argumentos relacionados com a localização favorável e as boas vias de comunicação para captar todo o tipo de investimentos. Os continentes, países, regiões e municípios digladiam-se nesta luta feroz para atrair para a sua área de influência empresas em quantidade e qualidade, reconhecendo que os factores de localização e distribuição assumem um papel crucial, se forem apresentados como vantagem competitiva junto dos potenciais investidores.

No plano da decisão governamental, a justificação das opções políticas exige cada vez mais a tomada de decisões apoiadas cientificamente por estudos quantificados. Uma opinião pública mais informada exige que as decisões estruturantes de localização de aeroportos, estações de comboio, hospitais, universidades, aterros sanitários, estações de tratamento de lixo ou mesmo de simples fábricas, sejam acompanhadas de estudos que as fundamentem e justifiquem em termos de vantagens de localização e distribuição que possam apresentar.

Numa economia global, vertiginosa e volátil, as decisões das empresas tendem a ser integradas e acima de tudo maleáveis de forma a permitir acompanhar uma realidade em mudança constante. Nesta realidade pouco firme, as empresas são confrontadas com fusões, deslocalizações e novas exigências de distribuição em tempo real. Nos nossos dias os clientes não podem, não querem, nem vão esperar; é necessário estar lá, no momento preciso e com o artigo desejado. Só com uma profunda reestruturação em termos de localização e distribuição é possível acompanhar tais exigências.

A abordagem sequencial e separada das questões relacionadas com a localização e distribuição é, actualmente, de aplicação reduzida e restringida apenas a algumas situações muito particulares. Na prática, imaginar e conceber um sistema puramente de localização é uma tarefa difícil. Tal sistema não permitiria o relacionamento com o exterior e só pode estar presente em conjecturas teóricas. Há sempre um motivo subjacente à localização e essa razão existencial implica certamente contactos com o exterior que, muito provavelmente, podem ser representados por um sistema de distribuição. Em sentido inverso, é pouco provável a existência de um sistema de distribuição iso-

lado. Ficaria órfão de uma base essencial de apoio, uma espécie de fonte de energia que sustente o seu movimento. Sendo assim, a localização e a distribuição são duas componentes dos sistemas logísticos que tendem a ser operacionalizados de forma integrada, dando lugar a uma só componente designada por Localização-Distribuição (LD).

As actividades logísticas relacionadas com a localização de Centros de Acção (CA)¹ e o estabelecimento de rotas a partir destes centros por um conjunto de clientes² são comuns a quase todas as organizações. As empresas quando pretendem instalar novos centros de produção ou distribuição, são confrontadas com a necessidade de ter em conta várias hipóteses de localização, os seus custos, as suas vantagens/desvantagens e, acima de tudo, as possíveis ligações aos clientes. Por vezes socorrem-se de uma avaliação empírica do problema, outras vezes fundamentam e quantificam com mais rigor os seus modelos mas, no geral, mesmo as pequenas empresas, sentem a necessidade de articular as suas políticas de localização-distribuição.

Ao longo da primeira metade do século XX as organizações foram crescendo progressivamente de complexidade. A expansão a nível mundial de algumas empresas trouxe novos desafios relacionados com a rede de produção e distribuição dos seus produtos. Cada vez mais se sentia a necessidade de criar ferramentas que pudessem auxiliar as decisões relacionadas com a localização e a distribuição, mas foi só no início da década de 60 que surgiram as primeiras tentativas para abordar, numa perspectiva de sistematização matemática, este tipo de problemas [147][148]. Este momento marca o nascimento de uma nova área de investigação que tem como objecto de estudo os Problemas de Localização-Distribuição (PLD), isto é, problemas em que é necessário decidir em simultâneo sobre duas temáticas, a localização e a distribuição. Com a criação de estruturas matemáticas para estes problemas complexos e a procura de métodos de resolução mais eficazes, foi possível construir um espaço próprio de intervenção apoiando e quantificando as decisões complexas de alto nível relacionadas com a Localização-Distribuição.

1.1 Motivações

O mundo em que vivemos é cada vez mais complexo e as decisões diárias das organizações estão progressivamente a deixar de ser exclusivamente empíricas ou circunstanciais, para passarem a ser apoiadas e quantificadas. Devido ao montante elevado de investimentos envolvidos, as decisões de localização ou de deslocalização passaram a ser de primordial importância e a carecer de estudos científicos que as suportem. Por outro

¹A designação Centro de Acção refere-se à estrutura física que serve como ponto de partida e/ou chegada dos percursos de visita pelos "clientes". Pode significar uma fábrica, um centro de distribuição, um armazém, um hospital, uma estação dos correios, etc..

²A designação "cliente" pretende apenas simbolizar um ponto a visitar. Pode ser um cliente de uma empresa, um marco de correio, um hospital, uma cidade, um posto de recolha de leite, uma árvore resinosa, etc..

lado, a própria opinião pública exige estudos científicos compreensíveis e credíveis que fundamentem as decisões quando se sente afectada por elas. Neste contexto, o estudo de PLD está na primeira linha do desenvolvimento de ferramentas de apoio à decisão.

Os PLD têm sido alvo, nas últimas 4 décadas, de um assinalável esforço de investigação. A revisão bibliográfica temática, apresentada no capítulo 3, revela a existência de mais de 80 artigos e 9 teses de doutoramento, publicados ao longo dos últimos 40 anos. No meio deste cenário poder-se-ia pensar que não restaria muito potencial de investigação nesta área. No entanto, este raciocínio está longe de corresponder à realidade do conhecimento sobre este tipo de problemas. Na verdade, a quase totalidade das publicações referem-se à investigação sobre PLD específicos, direccionados para a modelização de casos concretos e desta forma integrando muitos aspectos não essenciais à existência de um PLD básico. É um facto que o conhecimento que hoje existe sobre PLD se deve a estes trabalhos já publicados mas, na realidade, o investigador ainda se depara com alguma falta de sistematização e normalização. Os estudos apresentam uma base muito alargada de problemas com pormenores muito próprios, que dificultam por vezes a compreensão das suas características intrínsecas e podem mesmo suscitar alguma confusão. Esta tese surgiu com o propósito de, tanto quanto possível, contribuir para a criação de alguns alicerces nesta área, organizando o conhecimento existente e clarificando o conceito de PLD a partir de uma abordagem global.

A meio caminho entre a clarificação da noção de PLD e as propostas de resolução situam-se as formulações matemáticas do problema. Também nesta área se sentia a necessidade de construir os elementos básicos que pudessem suportar o "edifício". À excepção dos trabalhos de Laporte et al. [132][135][134], não é perceptível nos estudos já publicados uma intenção clara de estudar e explorar as características matemáticas mais elementares relacionadas com os PLD. Desta forma, a clarificação da noção de PLD é acompanhada da construção de algumas formulações matemáticas.

Por fim, uma palavra para a eterna busca de algoritmos de resolução mais rápidos e eficazes. Também neste capítulo há ainda um longo caminho a percorrer na procura de novos métodos, mais eficientes, robustos e maleáveis, de forma a poderem suportar as especificidades que surgem da aplicação a casos reais. Na literatura surgem esporadicamente propostas de algoritmos que integram procedimentos da Análise de Grupos. Trata-se de iniciativas isoladas que foram deixando algumas pistas sobre o potencial da integração desta área de estudo na construção de algoritmos de resolução heurística de PLD. Falta confirmar tais potencialidades. O repto estava lançado, o trabalho que se segue tenta responder ao desafio.

São estes os motivos que estão na base deste trabalho que se espera possa contribuir, ainda que modestamente, para a clarificação da investigação em PLD.

1.2 Estrutura da Tese

A tese está dividida em duas partes. A primeira, relacionada com os aspectos gerais sobre PLD, é composta pelos capítulos 2, 3 e 4. A segunda, onde se estuda em concreto um Problema de Localização-Distribuição com Capacidade, integra os capítulos 5, 6, 7, 8 e 9. Desta forma, pretende-se percorrer um caminho que conduza desde os aspectos mais genéricos, à definição e estudo de um PLD simples e representativo, aproveitando para propor e testar métodos de resolução inovadores.

No segundo capítulo os modelos de localização-distribuição são integrados numa área mais abrangente designada por Logística, tecendo algumas considerações sobre o papel da localização-distribuição na logística empresarial e sobre o designado *marketing* logístico.

A revisão bibliográfica anotada, com a apresentação e organização classificada de 84 artigos e alguns dados estatísticos, é o objecto do terceiro capítulo. Mostrando a existência de uma grande variedade de PLD com características específicas, este capítulo serve de motivação para o seguinte, onde é proposta uma taxonomia de base posicional para PLD e avaliada a sua complexidade computacional, provando que se trata de um problema NP-completo.

O capítulo 5 dá início a uma nova parte da tese, onde se passa dos aspectos gerais sobre PLD para o estudo de um problema concreto que integra algumas características teóricas e práticas elementares e que se designou por Problema de Localização-Distribuição com Capacidade (PLDC). A opção de estudo sobre este tipo de problema é devidamente justificada neste capítulo.

A apresentação de formulações matemáticas em Programação Linear Inteira para o PLDC é o objectivo do 6º capítulo. São propostas formulações com dois e três índices para PLDC orientados e não orientados.

No capítulo 7 são abordados aspectos relacionados com a resolução exacta do PLDC. Com base numa das formulações propostas no capítulo 6, é construído um algoritmo exacto que permite resolver PLDC de pequena dimensão e obter limites inferiores para problemas maiores, por relaxação de algumas restrições.

A construção de algoritmos heurísticos para resolução do PLDC é uma consequência lógica da extraordinária complexidade deste tipo de problemas. No capítulo 8 é apresentado um algoritmo heurístico que integra técnicas de Análise de Grupos. São construídas 4 versões do algoritmo, ajustando outros tantos procedimentos hierárquicos e não hierárquicos, assim como 6 medidas de proximidade distintas. É efectuada ainda uma avaliação relativa e absoluta do desempenho das várias versões, após testes computacionais sobre 19 instâncias do PLDC adaptadas da literatura.

As conclusões e as novas vias de investigação que este trabalho permite antever são explanadas no capítulo 9.

Com excepção dos ficheiros de Perl [176], não existem na literatura propostas de

ficheiros de dados para construção de instâncias do PLDC. No apêndice A é apresentado um conjunto de ficheiros de dados para PLDC recolhidos ou adaptados da literatura.

No apêndice B são ilustradas as melhores soluções obtidas para as instâncias testadas nesta tese, anexando informação sobre as rotas formadas, a sua capacidade e o seu custo.

No apêndice C são acrescentados alguns elementos que complementam a revisão bibliográfica apresentada no capítulo 3.

Abordar a resolução do PLDC com base nas formulações com 3 índices é o objectivo do apêndice D.

1.3 Principais Contribuições

- Integração da Localização-Distribuição na área da Logística, com a consequente visão mais abrangente sobre este tipo de problemas.
- Criação de uma perspectiva histórica compartimentada sobre PLD com a apresentação de uma bibliografia organizacional e anotada.
- Proposta de taxonomia posicional para PLD.
- Confirmação demonstrativa da realidade NP-completa dos PLD.
- Definição fundamentada de um PLDC básico e representativo. Construção das respectivas formulações matemáticas.
- Construção de um conjunto de instâncias do PLDC.
- Proposta de um algoritmo de resolução exacta do PLDC não orientado a partir da relaxação de determinadas restrições na formulação com dois índices.
- Proposta de um método heurístico de resolução baseado na Análise de Grupos.
- Avaliação do desempenho de várias técnicas de agrupamento e medidas de proximidade com a confirmação do bom desempenho na resolução do PLDC.

Parte I

Aspectos Gerais

Capítulo 2

A Logística da Localização-Distribuição

2.1 Introdução

Com origem na área das ciências económicas têm surgido vários estudos sobre logística [70][38][124] que, em geral, relatam os problemas relacionados com a localização e a distribuição de forma descritiva, não se aventurando para além da sistematização de alguns procedimentos metodológicos simples de apoio à decisão nesta área. Por outro lado, com algumas excepções [56][68], a maioria dos artigos sobre Problemas de Localização-Distribuição (PLD) apresenta-os como sendo corpos autónomos, formais e simbólicos, desligados da envolvente logística e sem uma visão para além da mera formulação matemática ou método de resolução proposto.

Neste capítulo é abordada a integração da Localização-Distribuição na esfera da logística, construindo-se uma ponte entre a visão mais descritiva proposta pelas ciências económicas e os estudos predominantemente formais e quantificados das ciências matemáticas, na certeza de que é na união de ambos os saberes que se encontra o caminho para a real compreensão deste tipo de problemas.

2.2 Sistemas Logísticos

Algumas definições de logística são simples e facilmente compreendidas mas, porventura, não retratam na plenitude todas as funções e competências relacionadas com a logística. Melnyk e Denzler [150] definem a logística como sendo toda a actividade de transporte e armazenagem dentro da cadeia de abastecimento, desde o fornecedor até ao consumidor. Evans [70] não se afasta muito desta ideia de logística, referindo-a como sendo o estudo sistemático de todo o processo de aprovisionamento de bens e serviços a partir de um ponto oferta para um ponto procura, assim como de todo o fluxo de informação que lhe está relacionado.

Inicialmente relacionada com as acções militares, a logística rapidamente se adaptou com grande sucesso às organizações públicas e privadas, especialmente aquelas cuja dimensão exige tomadas de decisão apoiadas.

A logística empresarial, nascida no início do século XX, sofreu grandes desenvolvimentos a partir da década de sessenta. A ideia de logística como um simples movimento de fluxos foi ampliada por Gepfert [86], considerando-a como uma área funcional que integra actividades distintas como a constituição e gestão de *stocks*, o transporte, a programação de rotas e a gestão e manutenção do equipamento. Neuschel [171] observa que as empresas, embora conscientes do papel primordial da distribuição, tinham muita dificuldade em obter ganhos de eficiência nesta área. Como causas apresenta o desconhecimento dos custos de distribuição, o deficiente domínio do processo de distribuição e o desconhecimento das técnicas a aplicar, concluindo que esta era ainda uma fronteira a descobrir.

No final da década de 70 e princípio da década de 80, Heskett [104] e Shapiro [192] rompem com a ideia meramente operacional de logística, ligando-a definitivamente à estratégia.

Nos parágrafos anteriores é perceptível como a logística foi sucessivamente abrangendo vários sectores económicos. Inicialmente, deixou de estar somente relacionada com a empresa para se ocupar da cadeia de abastecimento; em seguida, passou à distribuição e, por fim, centrou-se no seu principal *output*, o serviço ao cliente/consumidor. Mas, a evolução do conceito de logística ainda não tinha terminado. Em 1984, Sharman [193] traz para a logística os sistemas de informação, advertindo para os perigos de continuar a olhá-la meramente como sinónimo de distribuição física.

As referências mais actuais à logística reflectem já este carácter mais generalista.

O *Council of Logistics Management* define logística com sendo:

*"Logistics is that part of Supply Chain Management that plans, implements, and controls the efficient, effective forward and reverse flow and storage of goods, services, and related information between the point of origin and the point of consumption in order to meet customers requirements."*¹

Carvalho [38] apresenta uma visão ainda mais ampla. Além da vertente de distribuição, coloca também a localização sob a esfera das competências da logística.

Refere-se à logística como

"...um sistema de actividades integradas pelo qual fluem produtos e informação, desde a origem ao ponto de consumo, sustentado por factores que

¹Definição recolhida em 23/04/2004 no endereço <http://www.clm1.org/>, onde se descreve o CLM da seguinte forma: *"Founded in 1963, CLM is the preeminent association for individuals involved in logistics and supply chain management. CLM provides educational, career development, and networking opportunities to its over 10,000 members and to the entire profession"*.

determinam a vertente de disponibilização da organização, isto é, um sistema que responda em tempo certo, com a quantidade correcta e que se conecte aos locais mais apropriados. E, muito embora seja esta a óptica de serviço total, deve estar implícita a busca de um ponto de equilíbrio óptimo para a organização em termos de custo."

A partir do momento em que iniciaram a expansão para além do seu bairro, as empresas começaram progressivamente a sentir a necessidade de aprofundar e aperfeiçoar os seus procedimentos logísticos. Hoje, com uma actuação à escala global, as empresas recorrem às mais avançadas técnicas da logística, conscientes que, só por esta via, podem alcançar a qualidade total e servir eficazmente os seus clientes. São inúmeros os casos de sucesso que radicam essencialmente numa correcta interpretação e implementação da logística. Empresas como a Wal-Mart, Tesco, McDonalds, Benetton, DuPont, Lego, Legrand, Sonae Distribuição, Exel Logistics, Hewlett-Packard, Piaggio, Transportes Luís Simões, entre muitas outras, devem grande parte da sua enorme expansão à logística e confirmam que a correcta gestão empresarial deve assentar, também, num forte pilar de gestão logística.

2.2.1 Modelos de Apoio à Decisão Logística

Se, até há poucas décadas, a logística fazia parte das preocupações apenas das grandes multinacionais, actualmente, mesmo as pequenas empresas usam, quase diariamente, algumas das boas práticas da logística. É uma aplicação por vezes empírica, outras apoiada por uma sistematização dos procedimentos logísticos mais aconselháveis, mas, em geral, não é suficientemente sustentada por métodos científicos.

Encontrar um desejado compromisso entre mercado e produção é o grande objectivo da maioria das empresas, ainda que algumas o procurem alcançar de forma pouco consciente. Este objectivo, aparentemente simples, revela-se quase sempre difícil de atingir. Um produto não pode somente satisfazer os objectivos de mercado descuidando a produção; por outro lado, decisões que consideram exclusivamente a produção podem ter custos inoportáveis de distribuição. A todas estas questões é necessário responder em tempo útil, mantendo altos níveis de produtividade, baixos custos e integrando e optimizando todos os factores que podem contribuir para o sucesso do Sistema Empresarial. É uma tarefa abrangente, complexa, que cada vez mais é suportada por métodos científicos de apoio à decisão.

Neste sentido, o papel dos modelos de sistemas logísticos é apoiar os decisores na escolha do sistema que permite a melhor combinação custo/serviço, de entre todas as configurações alternativas possíveis. A grande complexidade dos sistemas logísticos tem contribuído para um grande esforço de modelação. O grande número de variáveis em jogo, muitas vezes com inter-relações complexas entre as várias componentes do sistema sugere que uma aproximação estruturada do sistema é, talvez, a via mais lógica para o

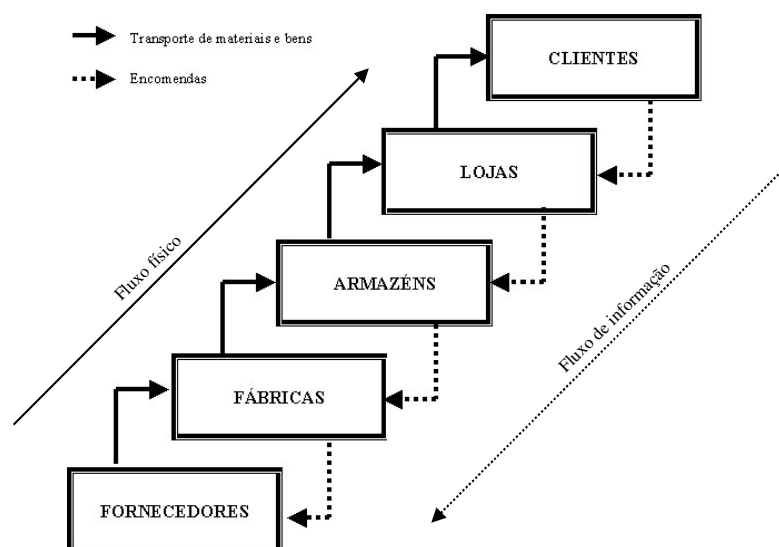


Figura 2.1: Sistema logístico empresarial. Fonte [70].

desenvolvimento de um modelo logístico [106].

As principais metodologias que têm sido empregues no desenvolvimento de modelos de grande escala são a simulação e a optimização. Os sistemas de simulação são habitualmente muito detalhados, muito caros, consomem muito tempo computacional e obrigam os utilizadores a especificar o sistema, em vez de informar o decisor de qual o sistema mais apropriado. Neste sentido, têm a capacidade de informar o decisor sobre o comportamento de um determinado sistema, mas não permitem a sua optimização. Por outro lado, os modelos de optimização permitem, a partir de um conjunto de dados e restrições, determinar optimamente as variáveis em estudo. Devido à sua inaptidão para incorporar a dinâmica das acções logísticas, os modelos de optimização sacrificam algum realismo. House e Karrenbauer [106] vaticinam que o futuro está na interligação dos dois sistemas de modelação aproveitando as vantagens inerentes a cada um deles.

2.2.2 Componentes da Logística

Na sua forma mais simples, um sistema logístico empresarial é composto por três componentes principais, o fornecedor, uma estrutura intermédia (fábrica, empresa distribuidora, loja) e o cliente. Na maior parte dos casos a realidade é um pouco mais complexa, existindo vários escalões intermédios, tais como fábricas, centros de distribuição e lojas², entre o fornecedor e o cliente (Figura 2.1).

A matéria prima é adquirida aos fornecedores e transportada para as fábricas onde é transformada em produtos finais. Estes bens são geralmente enviados para centros de distribuição e finalmente para os locais de venda ao público (lojas). Em cada uma destas

²Como já foi referido no capítulo anterior, são designados genericamente por Centros de Acção (CA).

Tabela 2.1: Actividades logísticas.

Serviço aos clientes	Seleção dos locais de implantação
Previsão de vendas	Aquisições
Comunicações da distribuição	Embalagem
Controlo de inventário	Manuseamento de devoluções
Manuseamento de material	Reciclagem e eliminação de desperdícios
Processamento de encomendas	Tráfego e transportes
Assistência ao serviço	Armazenagem

etapas, fabrico, armazenagem e venda ao público, é mantido um inventário cuidadoso de forma a satisfazer a procura num espaço de tempo aceitável. Obviamente esta é uma visão muito simplista das componentes do sistema logístico, deixando de fora a frota de veículos³ (homogénea ou não), os funcionários, ou até os sistemas computadorizados de gestão da informação e apoio à decisão.

De forma mais lata, são componentes logísticas todas as entidades físicas que intervêm e suportam o processo logístico.

2.2.3 Actividades Logísticas

A tabela 2.1 indica um vasto conjunto de actividades logísticas proposto por Lambert et al. [124]. Sendo todas da maior importância, é no entanto objectivo deste trabalho posicionar, face à logística, as actividades relacionadas com a problemática da localização e distribuição.

Um dos objectivos da logística empresarial é disponibilizar os produtos aos clientes no local e momento em que estes são procurados. Sendo assim, decidir onde o produto é produzido, armazenado e colocado à venda é um factor de primordial importância num mercado onde tudo se passa cada vez mais depressa e ninguém pode ou quer esperar pelo bem ou serviço que pretende adquirir.

As decisões de gestão logística podem ser categorizadas em três níveis hierárquicos.

- Decisões estratégicas, geralmente relacionadas com os aspectos de maior dimensão e mais dispendiosos. Têm a ver com uma eficiente afectação de recursos às várias componentes das operações logísticas durante longos períodos de tempo. São decisões dificilmente reversíveis;
- Decisões tácticas, tipicamente ligadas com investimentos de capital moderado que envolvem planos anuais, semestrais ou trimestrais que podem ser revertidas a custo moderado;
- Decisões operacionais, tomadas diariamente, caracterizadas por baixos investimentos e que podem ser alteradas a baixo custo.

³Caso o transporte seja efectuado por estrada.

Tabela 2.2: Decisões de localização, transporte e inventário de acordo com o seu nível hierárquico.

	Decisões Logísticas		
	Estratégicas	Táticas	Operacionais
Localização das instalações	Número de CA Localização dos CA Afectação dos CA aos fornecedores Alocação das encomendas aos CA	Equipamento para o manuseamento físico das mercadorias e materiais.	
Transporte	Meio de transporte Tipo de veículo	Transportador Dimensão da carga	Afectação das cargas aos veículos Rotas/Escalonamento Afectação da tripulação
Inventário	Inventário total do sistema Localização dos inventários	Dimensão dos inventários nas várias localizações Níveis dos <i>stocks</i> de segurança nas várias localizações	Disciplina de controlo nas várias localizações

Geralmente as decisões de mais alto nível traçam fronteiras para as decisões dos níveis inferiores.

No caso concreto do projecto de uma rede de distribuição é necessário tomar decisões numa perspectiva integrada, relacionando três aspectos:

- localização das instalações (serviços);
- transporte;
- inventário.

O projecto de uma rede de distribuição consiste na determinação dos seguintes elementos:

- número e localização dos CA;
- afectação dos clientes aos CA;
- planeamento dos fluxos dos fornecedores para os CA;
- selecção dos serviços de transporte entre as fábricas e os CA;
- nível dos inventários nos CA.

O objectivo do processo de desenho da rede de distribuição é a determinação do balanço óptimo entre os custos do serviço, de transporte e de inventário, privilegiando sempre o aspecto de interligação e compromisso entre as decisões de localização, transporte e inventário, devidamente integrados, como mostra a tabela 2.2, proposta por Perl e Sirisoponilp [179].

2.3 A LD no Sistema Logístico Empresarial

2.3.1 Decisões de Localização

Localizar Centros de Acção e proceder à distribuição dos bens e/ou serviços que emanam destes centros são procedimentos habituais nas organizações, integrados a uma escala mais abrangente na actividade logística. As organizações são confrontadas com a necessidade de tomar decisões quanto à localização de fábricas, armazéns, lojas de venda ao público, hospitais, centros de saúde, estações de tratamento de esgotos, aterros sanitários, entrepostos de transporte de passageiros e/ou mercadorias, postos de recolha de leite ou produtos agrícolas, centros de controlo e fiscalização, estações de correio, repartições públicas, quartéis de bombeiros e um sem número de outras situações que devem ser alvo de um estudo cuidadoso que suporte e fundamente as opções tomadas. Trata-se de decisões estratégicas de longo prazo, que envolvem grandes investimentos e que, uma vez implementadas, não podem ser alteradas facilmente. Com impacto duradouro na estrutura geral das organizações, as decisões de localização influenciam o seu desempenho futuro, ditam a diferença a médio e longo prazo e exigem um cuidadoso estudo que acautele a sua sobrevivência. Num mundo em constante mudança as decisões de localização têm um efeito estático, quer no espaço quer no tempo, contrariando de certa forma uma lógica de permanente inovação, criação e alteração de imagem que trespasa a maioria das organizações.

Motivações e factores

As motivações para tomar decisões de ampliação ou readaptação e consequentemente de localização podem ser várias. Por exemplo:

- necessidade de expandir os serviços;
- necessidade de aumentar a competitividade;
- necessidade de estar próximo dos clientes de forma a criar laços de confiança, segurança e baixar os custos de distribuição;
- necessidade de estar próximo dos fornecedores de forma a manter um baixo *stock* e prazos curtos de recepção de matéria prima e componentes;
- procura de baixos custos, baixos impostos e baixos salários;
- disponibilidade de mão de obra e serviços;
- políticas estatais e locais;
- clima.

Tabela 2.3: Factores que podem influenciar as decisões de localização.

Laborais	Existência, ou não, de mão de obra
	Relações entre gestores e empregados
	Capacidade de retenção de mão de obra
	Disponibilidade de mão de obra qualificada
Transportes	Custo da mão de obra
	Proximidade das fontes de abastecimento
	Proximidade dos mercados
	Meios de transporte adequados
Infra-estruturas	Custos de transporte
	Reservas de água
	Recolha de lixo
	Rede de energia eléctrica
	Disponibilidade de combustíveis
	Redes de telecomunicações
Qualidade de vida	Preços dos serviços disponibilizados
	Clima e condições de vida
	Escolas, centros de formação profissional
	Universidades e serviços de investigação
	Atitude da comunidade
	Factores religiosos
Políticos e locais	Custos da propriedade
	Política de impostos nacionais e regionais
	Estabilidade social e política
	Enquadramento ambiental
	Enquadramento fiscal
	Visibilidade a partir da principal via de comunicação

Em suma, todos os factores que possam afectar a produtividade, qualidade e funcionalidade do sistema e da sociedade em geral.

São vários os factores económicos e não económicos que podem influenciar a escolha de localização de um serviço mas, em geral, as decisões sobre a localização devem ter em conta toda a estratégia de desenvolvimento da empresa, sistema empresarial ou organização (tabela 2.3). Embora pouco comentados, assumem hoje um papel de primordial importância a correcta condução dos aspectos relacionados com os impactos ambientais, a preservação de recursos e o ordenamento do território. Uma opinião pública mais atenta a estes factores deseja o progresso, mas reconhece que deve ser tanto quanto possível sustentado.

Etapas

Ter uma perfeita consciência da diversidade de factores que condicionam a localização é importante, mas o processo que conduz à decisão sobre a localização é complexo e deve ser conduzido de forma correcta, envolvendo as entidades locais, regionais e por vezes nacionais. Segundo Júlio Pedrosa⁴, "...importaria prestar uma renovada atenção às questões regionais e locais, começando pelos factores que as pessoas ponderam prioritariamente quando tomam decisões sobre a sua fixação num lugar, numa cidade, numa região, num país."

⁴In: *Ser capital quando se cresce*, Jornal de Notícias, 20-03-2003.

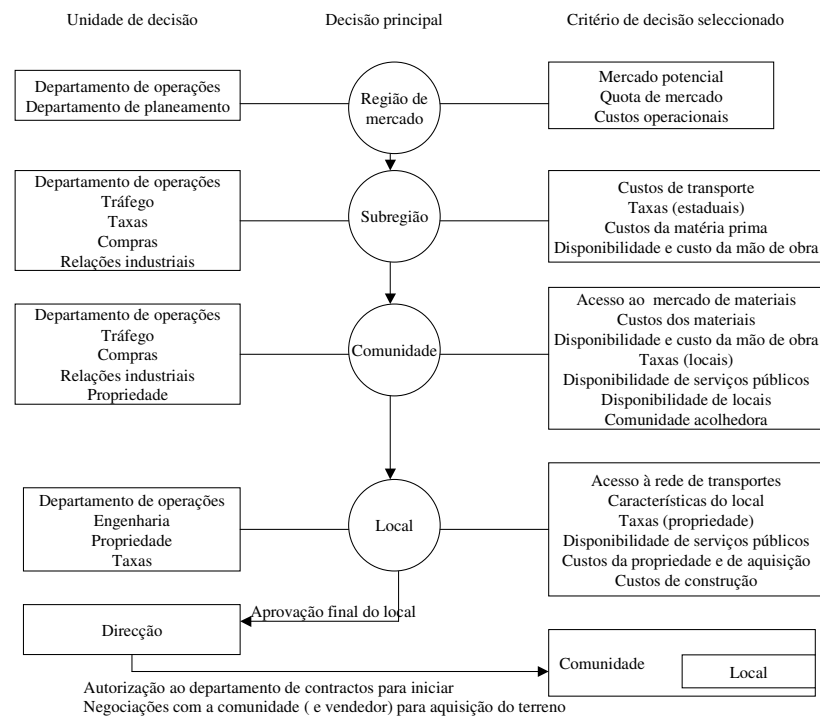


Figura 2.2: Etapas decisórias relacionadas com a escolha da localização de uma fábrica. Fonte [37].

Um estudo de localização deve ser implementado cuidadosamente cumprindo várias etapas, a saber:

- planificação inicial para determinar metas, objectivos, estratégias de produção e critérios específicos de cálculo;
- estudo geográfico para determinar potenciais localizações que cumpram algumas restrições relacionadas com reservas de água, mão de obra especializada, ambiente político e laboral, etc.;
- análise de dados para desenvolver medidas quantitativas de avaliação do desempenho financeiro ou dos benefícios de cada potencial localização;
- procedimentos de cálculo e selecção para escolher uma ou mais localizações entre as candidatas.

Do processo de localização faz também parte a obtenção de todos os pareceres dos órgãos consultivos e a auscultação das organizações legalmente relacionadas com o processo. A figura 2.2 sintetiza a forma como deve decorrer o processo que conduz à localização, no caso particular de uma fábrica.

Sistemas de localização

O principal objectivo das decisões de localização é posicionar cada elemento do processo de produção/distribuição respectivamente a todo o sistema. Por exemplo, uma fábrica deverá estar estrategicamente localizada entre os fornecedores e os seus clientes. Aquilo que se entende por posicionamento estratégico pode variar de caso para caso; uns optam por localizações próximas das fontes de fornecimento de matéria prima (por exemplo, as cimenteiras) outros próximo dos clientes (por exemplo, os hipermercados). Processos mais complexos podem surgir quando grandes empresas pretendem simultaneamente posicionar fábricas e CA relativamente aos fornecedores, pontos de venda e outros possíveis factores.

No meio da enorme variedade de casos práticos que reflectem as intenções e necessidades da organização, é necessário estabelecer alguns aspectos que identifiquem o problema em estudo.

Regra geral, um sistema de localização é composto por três níveis [127]. No primeiro nível situam-se os serviços primários que habitualmente são compostos por unidades produtivas (mas também podem ser hospitais, centros de recolha de lixo, aeroportos, etc.). No segundo nível encontram-se os serviços secundários, que representam locais de actividade intermédia tais como pontos de trasfega ou armazéns, centros de distribuição, terminais de contentores, etc., designados neste texto por Centros de Acção (CA). Finalmente, o terceiro nível é ocupado pelos clientes (figura 2.3). No entanto, existem outras possibilidades como, por exemplo, a situação de dois níveis de que são exemplos clássicos o Problema de Transportes [77], o Problema de Localização-Afectação [49] e o Problema de Rotas de Veículos [44]. Os serviços primários assim como os clientes, na maior parte dos casos, têm localização fixa e conhecida. O mesmo já não acontece com os serviços intermédios (CA), em relação aos quais é muitas vezes necessário decidir sobre o seu número e localização.

Entende-se por sistema de localização simples/dupla/tripla... uma situação em que, ao mesmo nível, se posicionam 1/2/3... elementos do mesmo tipo. No caso de existir, num determinado nível, um grande número de elementos, o problema diz-se de localização múltipla.

A figura 2.3 mostra um sistema de distribuição com 3 níveis. O primeiro é simples, constituído por uma única fábrica. O segundo é duplo, uma vez que está em jogo a localização de dois CA. Ao nível dos clientes a localização é múltipla. Se está em causa a distribuição de bens, estes farão o percurso da fábrica para o CA e de seguida para o cliente. Se, por outro lado, o objectivo é recolher produtos então o sentido é o oposto. Embora a maior parte dos estudos foque somente um dos processos, de recolha ou de distribuição, alguns trabalhos [155][157] consideram simultaneamente a distribuição e a recolha.

O sistema clássico em três níveis pode variar consoante o problema em estudo.

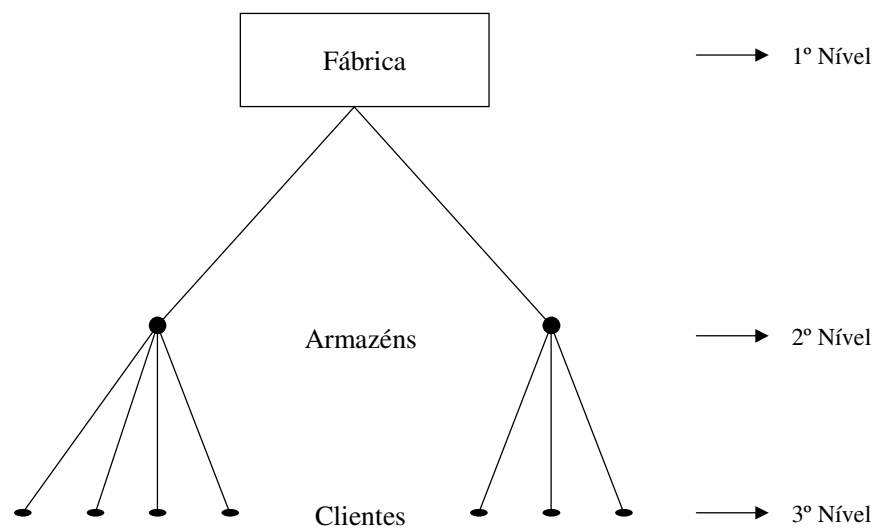


Figura 2.3: Sistema de distribuição empresarial mais comum, na tipologia de três níveis. Fonte [127].

Nambiar et al. [168] ilustram um sistema que designam por "*central rubber processing factories*" composto por 4 níveis: produtores, estações de recolha, fábricas e porto. Mercer et al. [151] e Dejax [59] distinguem dois níveis intermédios considerando sistemas com 4 níveis. Van Roy [207] considera um sistema complexo multi-nível (6 níveis), relacionado com a produção e distribuição de combustíveis, prevendo a existência de rotas (do tipo ida e volta) entre níveis não consecutivos. Watson-Gandy e Dohrn [209] e Murty e Djang [162] permitem a existência de rotas entre o 1º e o 3º nível sem passar pelo segundo. Or e Pierskalla [174] consideram um sistema com dois níveis.

A localização dos CA pode ser contínua ou discreta. No primeiro caso os CA podem ser instalados em qualquer ponto do plano. Obviamente, desta forma é possível que o modelo de apoio à decisão sugira localizações indesejáveis, como por exemplo sobre um rio, sobre um edifício ou na encosta íngreme de uma montanha. Para uma revisão sobre localização contínua podem ser consultados os trabalhos [211][48][100][67][78][63]. No segundo caso, é considerado um conjunto discreto de potenciais localizações de CA. Esta abordagem permite seleccionar locais que, de acordo com as organizações, preencham um determinado conjunto de requisitos. Debruçaram-se sobre a localização discreta os autores [16][99][148][78][3][159][63].

2.3.2 Decisões de Distribuição

A distribuição joga um importante papel na eficiência de uma empresa ou instituição. Se a decisão estratégica de localização for acompanhada de uma boa decisão táctica de curto prazo (muitas vezes diária) relativa à distribuição de bens e serviços, a partir dos centros de produção e/ou armazenagem, então tudo se conjuga para um au-

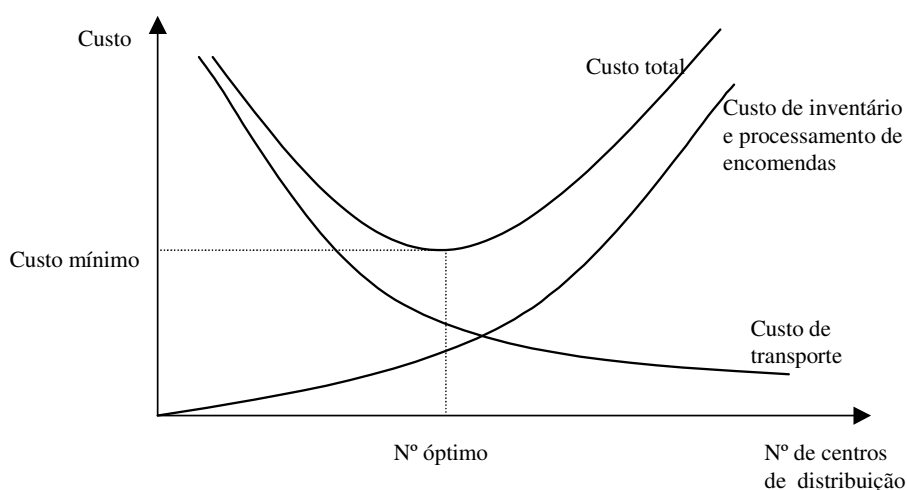


Figura 2.4: Custo de distribuição num sistema de distribuição empresarial. Fonte [70].

mento da eficácia, competitividade, organização geral e qualidade de vida das pessoas.

Em geral as empresas optam por transportes de grandes dimensões a partir das fábricas para os CA, situados o mais próximo possível dos postos de venda, para depois efectuar a distribuição em veículos de menor porte pelas lojas de venda a retalho.

A grande fatia dos custos de transporte está relacionada com a distribuição pelas lojas. Por isso, à medida que aumentam os centros de distribuição o custo total de transporte tende a diminuir, enquanto aumentam os custos de inventário de processamento de encomendas, administrativos, de manutenção ou de arrendamento de imóveis. Esta relação de preços é ilustrada na figura 2.4, onde também se representa a função que traduz o custo total e que resulta da soma das outras duas funções de custo anteriormente referidas. É imediato que o número ideal de centros de distribuição é aquele que minimiza o custo total. Um diagrama mais completo (porventura mais complexo) pode ser visto em Rand [180].

Outro factor que é fortemente influenciado pelo número de centros de distribuição é o nível de serviço aos clientes. Muitas medidas de produtividade podem ser usadas para avaliar o nível do serviço aos clientes. Como exemplo, são indicadas algumas:

- o tempo médio de processamento das encomendas, ou seja, o tempo entre a recepção de uma encomenda e a sua expedição;
- a percentagem de encomendas enviadas no prazo de x dias após a recepção da nota de encomenda;
- a percentagem de encomendas que são atempadamente satisfeitas;
- o número de danos e/ou perdas causados.

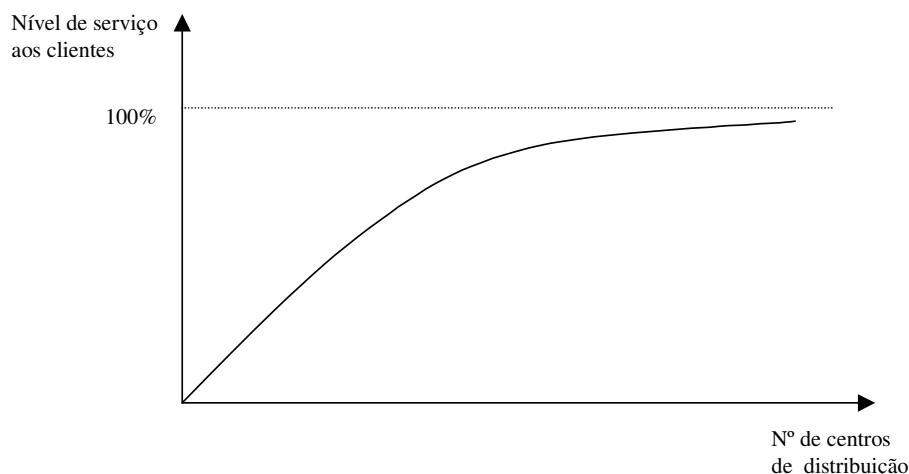


Figura 2.5: Função representativa do nível de satisfação dos clientes. Fonte [70].

As primeiras duas medidas dependem do controlo interno; as duas restantes dependem da localização dos CA face aos clientes. A figura 2.5 ilustra a variação do nível de satisfação dos clientes relativamente ao número de centros de distribuição.

A análise das figuras 2.4 e 2.5 mostra que baixos custos e altos níveis de satisfação dos clientes são áreas conflituosas. O número óptimo de centros de distribuição pode não corresponder a um nível aceitável de serviço aos clientes.

O processo de distribuição deve, ainda, ter em conta os estudos que apontam para uma diminuição da quota de mercado com a distância ao cliente. É necessário que a distribuição seja eficaz, e faça sentir ao cliente que a empresa está próxima, atenta às suas necessidades e disponível em permanência. Para isso não pode, em caso algum, falhar os prazos de entrega.

Aos decisores e investigadores cabe a tarefa de encontrar os necessários equilíbrios de acordo com os objectivos da empresa ou instituição.

Segundo Mercer e Rand [152], um estudo sobre distribuição deve seguir três etapas.

Em primeiro lugar, é necessário estabelecer um modelo geográfico que possa servir de base à localização dos clientes. Efectuar uma mera partição geográfica em quadrados com dez ou cem quilómetros de lado não é aconselhável. Alguns, localizados em zonas pouco povoadas possuem poucos clientes enquanto que outros, incluem aglomerados urbanos com centenas ou milhares de clientes. A divisão em regiões administrativas é mais aconselhada.

De seguida, é necessário modelar os mecanismos de mercado, isto é, estimar as vendas numa determinada área, a quota de mercado a atingir e os meios para a conseguir alcançar. A determinação dos custos de operação, quer dos veículos quer de armazenagem e manuseamento, encerram a fase de recolha de dados.

Decidir sobre a composição e dimensão da frota de veículos, as suas rotas, o seu

escalonamento e procedimentos de carga, faz parte de uma nova etapa de acção diária.

Entre a primeira etapa de enquadramento do problema e recolha de dados e a altura da tomada de decisões há que efectuar um estudo sistemático e apoiado do problema em que se procuram criar modelos matemáticos que permitam obter boas soluções ou mesmo soluções óptimas em tempo aceitável. Estas soluções poderão abrir novas pistas e fundamentar as decisões tomadas.

Rotas de Distribuição

Um dos componentes do sistema de distribuição que merece um olhar mais pormenorizado são as rotas de distribuição. Bodin e Golden [27] classificam as rotas de veículos (*vehicle routing*) como sendo uma sequência de pontos de distribuição e/ou recolha que devem ser visitados pelo veículo segundo uma certa ordem, com início e fim num CA. Já as escalas de veículos (*vehicle scheduling*) são uma sequência de pontos de distribuição e/ou recolha juntamente com um conjunto associado de tempos de partida e chegada.

A figura 2.6 refere várias categorias de distribuição entre os diversos níveis num sistema de distribuição com 4 níveis. Às designações *Distribuição Interna* e *Distribuição Externa*, sugeridas por Bookbinder e Reece. [30], acrescenta-se a *Distribuição Fonte*, entre os fornecedores e as fábricas. Cada uma destas categorias de distribuição é implementada através de percursos que admitem características próprias. Em geral, os veículos situados ao nível t efectuem percursos de distribuição ao longo do nível $t + 1$ [127], ainda que, alguns autores, como por exemplo Watson-Gandy e Dohrn [209], admitam a possibilidade de distribuição directa entre o nível 1 e o nível 3.

Laporte [127] divide os percursos de distribuição em dois tipos:

- percursos de ida e volta a um único cliente (*Trip*), (T);
- percursos em que são visitados vários clientes (*Route*), (R)⁵.

Desta forma é possível caracterizar um sistema de distribuição com três níveis da seguinte forma:

$3 / T / T \rightarrow$ Um sistema deste tipo pode ocorrer, por exemplo, no caso de empresas de fornecimento de betão amassado que recebem o cimento em pó em cargas directas e distribuem também em percursos de ida e volta.

$3 / T / R \rightarrow$ É talvez a situação mais comum, os armazéns de distribuição de produtos alimentares são um caso típico.

$3 / R / T \rightarrow$ Acontece quando os veículos percorrem os marcos de correio em percursos múltiplos recolhendo a correspondência aí depositada pelos cidadãos em percursos individuais de ida e volta.

⁵Outros autores consideram percursos especiais de visita a dois clientes que designam por *round-trip* [40] [41] [61] [107] [119].

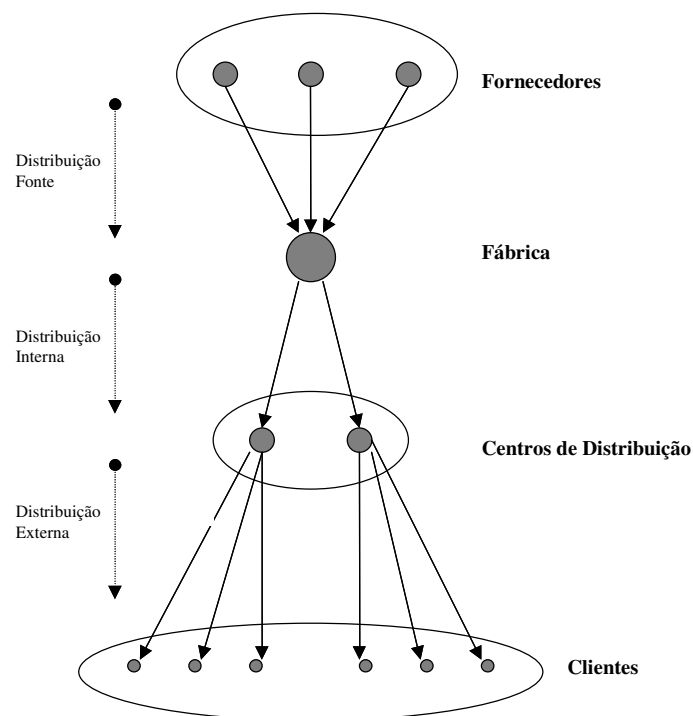


Figura 2.6: Distribuição num sistema logístico empresarial de 4 níveis com 3 categorias de percursos.

$3 / R / R \rightarrow$ É um caso frequente na imprensa escrita. Os jornais são transportados dos locais de impressão para os pontos de transferência em percursos múltiplos e posteriormente distribuídos do mesmo processo, embora a partir de veículos com menor dimensão.

Na verdade, os percursos de distribuição contemplados por Laporte não integram os casos de distribuição por caminhos entre dois pontos [147][148][182][60][36]. Trata-se de percursos de distribuição entre dois CA distintos, entre um cliente e um CA ou *vice-versa*.

Perl [176] estuda com mais profundidade as várias componentes de uma rota. A figura 2.7 mostra as suas propostas. De forma sintética, pode-se dividir o percurso de distribuição em três componentes: distância principal, tempo de paragem e distância interna.

O tempo de paragem é uma função das características da carga, isto é, do seu peso e do número e volume das peças. É influenciado pelas condições de carga ou descarga e equipamento disponível para o efeito, sendo independente da localização do centro de distribuição ou da ocorrência de outras descargas.

A distância principal é a soma das distâncias entre o CA e o primeiro cliente e entre o último cliente e o CA; trata-se de um percurso de ligação. A distância principal representa o efeito de localização do CA no custo de distribuição.

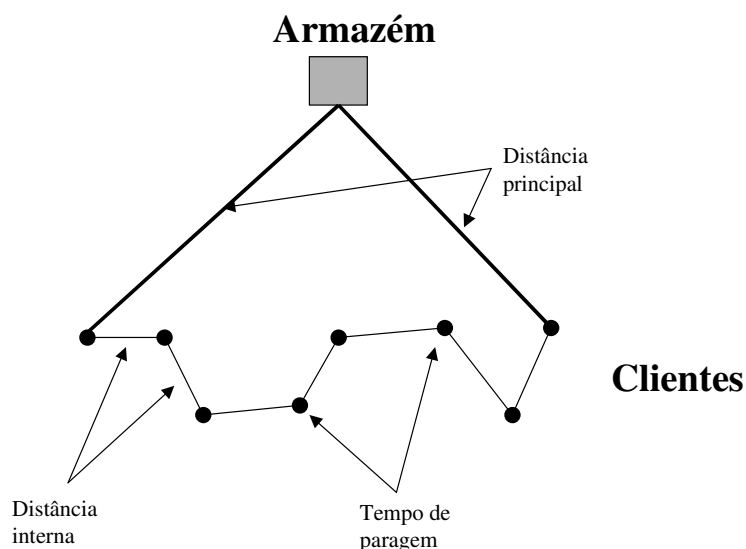


Figura 2.7: Componentes de um percurso de distribuição (rota) segundo proposta de Perl [176].

A distância interna da rota é a fonte de dependência entre o custo de distribuição para um cliente e os destinos das restantes distribuições. Depende da rota do veículo na área de distribuição, sendo afectada em primeiro lugar pela localização dos clientes relativamente uns aos outros e em segundo lugar pela localização do CA que determina o primeiro e último cliente da rota.

Estudos complementares sobre sistemas de distribuição podem ser efectuados em [180][152] [91][129].

2.3.3 Sistemas de LD

Os sistemas de localização e/ou distribuição são complexos e podem integrar um grande número de variáveis. Cada sistema é um caso particular, diferente dos restantes, com características próprias, algumas dificilmente mensuráveis.

Sendo os sistemas reais, em geral, bastante complexos, não tem sido fácil modelá-los matematicamente. Neste sentido, têm existido duas correntes de investigação que, embora partindo de pressupostos distintos, têm apontado para o objectivo comum de melhorar a compreensão dos sistemas de LD. Por um lado, existem os estudos que adaptam o mais possível os modelos matemáticos aos problemas reais, promovendo a integração minuciosa no modelo matemático do máximo de informação respeitante ao problema real, numa tentativa de retratar o mais fielmente possível a realidade. Os modelos assim obtidos são, em geral, muito densos, bastante elaborados e de difícil resolução. Por outro, os estudos que, atacando o problema de forma distinta, partem de uma abordagem teórica suficientemente desenvolvida e viável, representativa das carac-

terísticas comuns a uma classe de problemas, desenvolvendo à *posteriori* as adaptações inerentes às especificidades próprias de cada caso real. Neste sentido, a definição e investigação de problemas específicos, como sejam o Problema de Localização-Afectação (PLA), o Problema do Caixeiro Viajante (PCV) e o Problema de Rotas de Veículos (PRV) muito têm contribuído para uma forte aproximação entre o real e o teórico.

Os problemas logísticos relacionados com a LD assumem uma grande diversidade de variáveis e características que advêm da enorme variedade de situações reais que podem modelar. No entanto, no geral, são apenas dois os objectivos que trespasam a maior parte destes problemas:

- definir o número e localização dos CA a instalar;
- desenhar as rotas de distribuição a partir dos CA para os clientes.

Ao longo das últimas décadas uma grande variedade de autores encarregaram-se de efectuar um exaustivo estudo destes problemas, a maior parte das vezes sem efectuar qualquer ligação entre eles. Enquanto que a teoria da localização procura localizar CA assumindo que a distribuição é directa e individual a cada cliente, a teoria da distribuição pretende definir as rotas de distribuição a partir de CA com localização fixa [67].

Ao analisar um sistema de distribuição desde logo ressalva que os objectivos de localização e distribuição devem ser encarados numa perspectiva integrada. É imediato que eles se encontram fortemente ligados; alcançar um desprezando o outro impossibilita a obtenção de boas soluções. Estabelecer rotas de veículos sem ter em conta a localização dos CA, ou *vice-versa*, definir a localização dos CA sem atender às rotas a percorrer a partir deles é a melhor forma de obter uma péssima solução. Sussams [202] deixou clara esta dependência afirmando que

"the best set of vehicle routes to serve a given area is not necessarily that which minimizes the distance travelled. Efficient routing is inextricably bound up with depot siting".

Rand [180] reforça este raciocínio afirmando que

"Many practitioners are aware of the danger of suboptimizing by separating depot location from vehicle routing".

Geoffrion e Powers [85] acrescentam o seguinte:

"The very concept of a pure 'facility location analyzer' is obsolete; facility location decisions require a comprehensive distribution model that deals simultaneously with interdependent decisions".

Segundo Marks e Stricter [149], os modelos de rotas devem fazer parte integrante de um sistema completo de modelos para problemas de distribuição e localização, para os quais é necessário desenvolver técnicas eficientes.

Perl e Daskin [177] referem que a estimação dos custos de distribuição com vista à resolução de um Problema de Localização requer o conhecimento das rotas de veículos, enquanto que o traçado das rotas de distribuição depende da localização dos veículos. A interdependência entre localização e distribuição é evidente.

Mais recentemente, Wu et al. [214] confirmam a necessidade de unificação da localização com a distribuição, a partir do momento em que vários clientes podem ser servidos na mesma rota.

Enquanto vários autores continuam a referir-se à dependência entre a localização e a distribuição [210] [203] [67] [135], Salhi e Rand [188] vão mais além e dedicam mesmo um artigo a esta questão.

Min et al. [158] introduzem os problemas de localização-distribuição da seguinte forma:

"Os ambientes logísticos modernos são caracterizados pela desregulação e globalização que vieram colocar aos gestores fortes problemas, mas também desafios, relacionados com a localização, afectação e transportes. No cruzamento destes problemas surgem os problemas de localização-distribuição."

Referem ainda que, mesmo que não tivesse sido possível encontrar modelos eficientes para este tipo de problemas, pelo menos a sua discussão tinha servido para realçar a necessidade de uma visão integrada, promovendo uma distribuição eficiente com movimentos coordenados e não fragmentados no que toca à localização e distribuição.

É sobre esta sucessão de conclusões que realçam a interligação entre os problemas de localização e os problemas de distribuição que se vai construindo uma nova classe de sistemas, no pressuposto de que é essencial assumir uma abordagem conjunta da problemática relacionada com a localização e distribuição. Surge assim uma nova área de investigação que se debruça sobre uma classe emergente de problemas designados por Problemas de Localização-Distribuição (PLD) com o objectivo único de *Indicar quais os CA a instalar e simultaneamente estabelecer os percursos de ligação entre os CA e os clientes.*

Mas, afinal o que são PLD ?

Laporte et al. [131] definem PLD como sendo "*Problemas de Rotas de Veículos em que a localização dos CA não é conhecida à priori*".

Madsen [145] dá uma definição resumida e explícita sobre o que são os PLD aproveitando e ampliando a definição de Problema de Localização. Segundo o autor, PLD "*são problemas de localização de CA a partir dos quais são servidos clientes segundo rotas em vez de visitas individuais de ida e volta*".

Para Srivastava e Benton [199] os PLD podem ser definidos da seguinte forma: "Dado um conjunto admissível de potenciais localizações de CA e a localização dos clientes, encontrar a localização dos CA e as rotas para os clientes a partir dos CA de tal forma que o "custo" total seja minimizado. O "custo" total é a soma dos custos de localização e de distribuição".

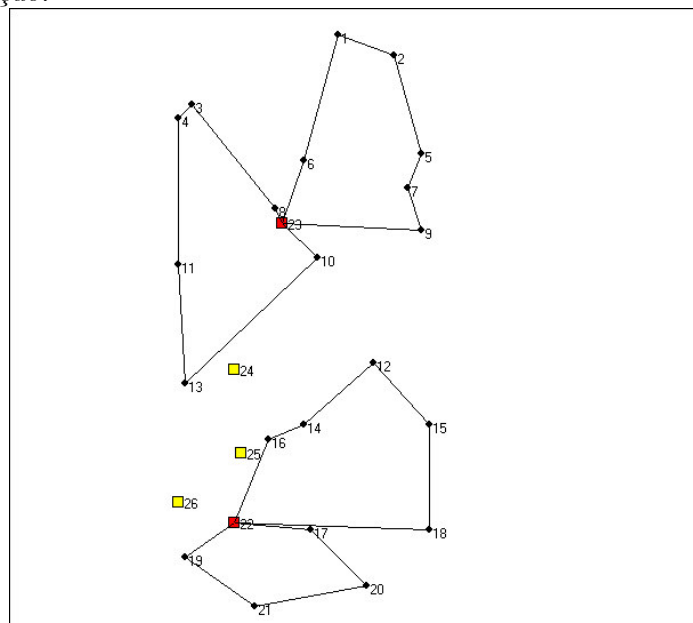
Laporte [127] opta por não definir o que entende por PLD. Em vez disso, prefere sistematizar as suas características. Segundo Laporte um PLD conjuga as seguintes condições.

1. Deve existir decisão sobre a localização em pelo menos um nível. Caso contrário o problema reduz-se a um puro problema de distribuição.
2. Deve existir pelo menos um percurso de distribuição múltiplo. Caso contrário o problema reduz-se a um puro problema de localização.

Relembrando a classificação proposta por Laporte (p. 22), problemas do tipo $\lambda / T / \dots / T$ não são PLD. Uma vez que contemplam apenas visitas de ida e volta em cada nível caem na classe dos Problemas de Localização.

Exemplo 1

A figura mostra a solução óptima de um PLD com dois níveis composto por 21 clientes e 5 potenciais CA, representados por círculos e quadrados, respectivamente. Trata-se de um PLD adaptado a partir dos dados relativos a um Problema de Rotas de Veículos (PRV) proposto por Gaskell [81]. Só 2 centros são abertos e são formadas 4 rotas de distribuição.



Solução óptima de um PLD com dois níveis (21 clientes e 5 potenciais CA).

Apesar do exemplo ilustrar um PLD simplificado é necessário compreender que estes podem assumir outras características e complexidades tais com múltiplos níveis (em termos empresariais podem admitir fornecedores de matéria prima, fábricas, depósitos, armazéns, pontos de trasfega, lojas e clientes) e rotas ou caminhos entre níveis não consecutivos. Por agora é apresentada uma primeira definição, considerando apenas dois níveis. A grande diversidade de casos teóricos e práticos que têm sido normalmente aceites como sendo PLD pressupõe que a definição assuma uma tal abrangência que possa conter todos.

Definição 1 *PLD Simples*

Conhecida a localização de um conjunto de clientes⁶, define-se Problema de Localização-Distribuição (PLD) como sendo um problema em que se pretende simultaneamente decidir sobre a localização de Centros de Acção (CA)⁷ e sobre o traçado de percursos⁸ envolvendo os CA e os clientes de tal forma que o custo total⁹ (da instalação dos CA e dos percursos) seja mínimo.

O PLD assim definido contempla apenas dois níveis, CA e clientes, mas é possível considerar PLD com múltiplos níveis.

2.4 A LD Numa Perspectiva Mais Abrangente

2.4.1 A União Europeia e as Políticas de LD

A União Europeia (UE) é hoje um enorme espaço comercial com um imenso potencial económico, mas ainda com uma deficiente infra-estrutura em termos de vias de comunicação. O Livro Branco intitulado "A Política Europeia de Transportes no Horizonte 2010", apresentado pela Comissão Europeia em Setembro de 2001, reconhece as fragilidades da Europa nesta área e promove o desenvolvimento de uma rede transeuropeia de transportes, rodoviários, ferroviários, aéreos e marítimos que irá revolucionar num futuro próximo as estruturas de localização e distribuição europeias realçando a necessidade de grandes investimentos nesta área.

⁶Tal como nos casos anteriores, também esta é uma designação representativa de uma grande variedade de possibilidades: clientes, cidades, aldeias, máquinas, caixas de correio, postos de recolha de leite, contentores, etc..

⁷A designação "Centro de Acção" é meramente representativa. Poderá ser um armazém, uma fábrica, um hospital, um ponto de trasfega, uma estação de tratamento de lixo, em suma, todo o ponto base que serve de apoio, partida e/ou chegada.

⁸Um percurso representa um trajecto que envolve clientes e, em geral, apenas um CA. Pode ser uma rota ou um caminho, sendo apenas condição necessária que, pelo menos um dos percursos, contenha mais do que um cliente.

⁹A designação "custo" traduz um avaliação quantitativa do valor do sistema de localização-distribuição. Esta avaliação integra os custos de instalação dos CA e da distribuição. Este último, pode ser baseado na distância, peso, tipo de carga, valor monetário, risco, tempo e outras características, dependendo do problema em causa.



Figura 2.8: Representação da intermobilidade no Livro Branco para a política Europeia de transportes.

A rede transeuropeia de comboios de alta velocidade e o programa Galileu de navegação por satélite, fazem parte da chamada Política Europeia de Transportes que tem por base a Rede Transeuropeia de Transportes e que, certamente, contribuirá para incrementos significativos na eficiência da mobilidade na Europa num futuro próximo.

Os programas para a intermobilidade podem também vir a colmatar algumas deficiências a nível europeu. O caso português é exemplar; durante anos não existiu qualquer interligação entre os vários tipos de transporte; os passageiros ou mercadorias que chegavam à capital nacional através do caminho de ferro não tinham acesso facilitado a outros meios de transporte. Ainda hoje, apesar de enormes avanços, persistem algumas dificuldades em cruzar o país de norte a sul por caminho de ferro e a interligação eficiente entre os vários meios de transporte (aéreo, marítimo, ferroviário, rodoviário) é ainda uma miragem. Entretanto os utilizadores vão desesperando na tentativa de colocar em funcionamento a pesada máquina da intermobilidade, acabando por recorrer ao único meio de transporte que podem dominar e controlar, o rodoviário.

Na UE assiste-se a um enorme incremento na mobilidade dos cidadãos. Entre 1970 e 1998 essa mobilidade passou de 17 para 35 Km/dia. O parque automóvel triplicou entre 1970 e 2000, passando de 62,5 milhões para quase 175 milhões de automóveis. O transporte de mercadorias é imenso, mas as previsões apontam para um aumento de 50% até 2010. Em suma, o movimento de pessoas e bens está em enorme crescimento e ao mesmo tempo aumenta a qualidade deste movimento. É cada vez mais imperioso chegar depressa, bem e dentro do prazo. Neste contexto, os países e as empresas que mais rapidamente souberem concretizar os objectivos de intermobilidade irão certa-

mente tirar partido destas estruturas, extraindo uma preciosa vantagem competitiva em termos de localização-distribuição.

As empresas de maior sucesso de hoje são as que conseguiram construir uma rede eficaz de distribuição dos seus produtos diminuindo os prazos de entrega. Muitas delas conseguem fazer a entrega das suas encomendas no espaço de um dia, mesmo em espaços tão vastos como o da União Europeia. Os clientes optam cada vez mais por produtos que não necessitem de manutenção de *stock*. As farmácias obtêm os medicamentos no próprio dia sem terem necessidade de os armazenar. Distribuidores dos mais variados produtos, desde tintas a produtos eléctricos, passando pelas peças para automóvel, garantem a entrega no prazo de 24 horas e por vezes vão ao limite de satisfazer as encomendas em escassos minutos. Para alcançar esta eficiência e garanti-la é necessário a implementação de uma correcta política de localização-distribuição e, acima de tudo, manter permanentemente sob estudo a eficácia das medidas que com ela se relacionam. Só assim é possível acompanhar as tendências do mercado e ao mesmo tempo corrigir e aperfeiçoar um dos pontos mais sensíveis para a sobrevivência das empresas modernas, isto é, a sua estratégia de Localização-Distribuição (LD).

2.4.2 Estratégias de *Marketing* Apoiadas na LD

No final do século passado, algumas empresas, em especial as americanas, começaram a aperceber-se que poderiam aumentar a sua eficiência, reduzir custos e incrementar a sua competitividade global localizando algumas funções de distribuição na Europa. O enorme sucesso do Centro Europeu de Distribuição da Hewlett-Packard, instalado na década de 60, catapultou para a ordem do dia a deslocalização para a Europa de empresas americanas que se apressaram a instalar algumas estruturas no velho continente, em especial as que estão relacionadas com a distribuição. Para a maior parte delas foi necessário repensar toda a estrutura de localização e distribuição.

Na Europa, poucos países estavam preparados para este facto novo; a Holanda foi o que melhor se posicionou e aquele que soube perceber as tendências do mercado global, captando a grande fatia de investimento nesta área. Preparou um cuidado plano de captação de investimento baseado nas suas vantagens de localização-distribuição. Uma pesquisa na *Internet* com base nas palavras "*european union location distribution costs*" revelou que, dos primeiros 40 itens, a apologia da Holanda ocupa 5 deles, existindo depois vários países referidos uma única vez (Irlanda, Escócia, Reino Unido, França, e Dinamarca). Hoje, nenhum país descarta as vantagens que podem advir de um correcto discurso e prática sobre as vantagens competitivas relacionadas com a localização-distribuição, mas ainda existem poucos a saber fazê-lo.

Através da sua agência para o investimento estrangeiro¹⁰, a Holanda faz difundir por todos os meios possíveis a imagem da sua centralidade europeia. Promovendo o porto

¹⁰ *Netherlands Foreign Investment Agency.*

internacional de Roterdão e as excelentes vias de comunicação, tem conseguido captar para o seu país, com enorme sucesso, os chamados Centros de Distribuição Europeus. Um excerto da página da Agência Holandesa para o Investimento Estrangeiro diz o seguinte:



"How can a company optimize its distribution strategy in Europe and ensure that goods are delivered most effectively across the supply chain? For American companies seeking to do business in Europe, setting up operations with direct sales is often an attractive first option. Products are imported to fill customer orders. However, this involves several days of sea transit and a lengthy process of clearing customs, negotiating transport, and so on. The preferred alternative is to choose a single point of entry for the inbound flow of goods, inventory keeping and order fulfillment in Europe - a European Distribution Center (EDC), which can incorporate final assembly, customization and localization (Value-Added Logistics (VAL)) that offers clear benefits.

*Benefits of setting up EDCs include lower transport costs through optimization of inbound transport, more efficient management of stock, shorter turnaround time of products, with faster delivery times and more expedient service to the end user. The Netherlands offers an excellent logistics infrastructure and has long been praised as the veritable "Gateway to Europe," with over 27% of all goods entering Europe passing through the Port of Rotterdam"*¹¹.

Colando-se ao sucesso alcançado pela Hewlett-Packard, uma conhecida empresa ligada à produção de impressoras e computadores que foi das primeiras a escolher a Holanda para abrir um grande Centro de Distribuição, este país conduziu uma bem sucedida campanha publicitária assente na promoção das suas vantagens em termos de localização-distribuição. Neste sentido, continua a financiar e a divulgar estudos científicos sobre todos os temas que possam ter algo a ver com a Localização-Distribuição na sua área de influência.

A França tenta também atrair o investimento esgrimindo os seus argumentos no que respeita à localização-distribuição. Através da sua agência para o investimento realça a sua centralidade europeia (figura 2.9), as suas excelentes vias de distribuição, custos reduzidos e tudo o mais que pode convencer os potenciais investidores a escolher o seu território para instalar os seus Centros de Distribuição Europeus.

Portugal está ainda a tentar organizar a sua Agência de Investimento, mas basta dar uma vista de olhos rápida pelos principais motores de busca na *Internet* para concluir que ainda não existe uma exploração adequada sobre as vantagens relacionadas com a localização-distribuição.

¹¹ Extraído da página da internet da *Netherlands Foreign Investment Agency* em 7 de Junho de 2003. (<http://www.nfia.com/html/solution/edc.html>)



Figura 2.9: Figura usada pela Agência para o Investimento Francesa para realçar a centralidade face à Europa.

É certo que Portugal não tem uma localização central na Europa, mas existem hoje novas oportunidades quando as empresas começam a redireccionar a sua estratégia global para uma acção mais próxima do cidadão (potencial cliente). Empresas como a CNN, Yahoo e Google estão a concluir que o crescimento global é limitado por barreiras de língua, cultura, desconfiança e gostos específicos dos clientes alvo. Estas barreiras só podem ser ultrapassadas por estruturas locais que transmitam confiança, compreendam e se façam compreender junto dos potenciais clientes. A opção por uma estratégia que lhes permita estar mais próximo dos cliente, adoptando a sua cultura, língua e tradições, parece ser a estratégia para um novo impulso de crescimento. Desta forma estão mais aptas a compreender as necessidades dos clientes e a adaptar as suas metodologias de produção e venda.

Neste contexto, é de esperar uma nova vaga de mudanças com epicentro nas vantagens que advêm da componente logística de localização-distribuição.

2.5 Síntese

As actividades logísticas relacionadas com Localização-Distribuição estão a assumir cada vez mais um papel determinante na eficiência das organizações, especialmente as empresariais. A procura da satisfação total dos clientes, da qualidade total das empresas e produtos e as grandes alterações nos mercados colocam permanentemente em cima da mesa a integração de uma correcta política de localização e distribuição. Por todo o lado, os países, regiões e municípios, fazem eco dos seus argumentos no

que toca à localização e distribuição, tentando captar para a sua área de influência o máximo de investimentos.

Conscientes de que muitas das decisões sobre a localização só podem ser tomadas após uma cuidadosa análise dos processos de distribuição, os organismos promocionais relacionam quase sempre estas duas variáveis, realçando o seu carácter de interligação e a sua importância em todo o sistema logístico. Surge, desta forma, uma nova classe de problemas integrados designados por Problemas de Localização-Distribuição com um propósito único e definição própria.

Paralelamente, apoiando-se num estudo mais teórico, têm sido dados passos concretos no sentido de encontrar formulações matemáticas que permitam modelar os problemas reais sem os desvirtuar e, ao mesmo tempo, sem tornar demasiado penosa a sua resolução.

Finalmente é reconhecida a autêntica revolução operada a nível Europeu na área da localização-distribuição, motivada pela implementação do plano de construção das redes transeuropeias de transportes. A estratégia das empresas relativamente à localização-distribuição será certamente reavaliada em face de um novo enquadramento e das novas possibilidades de transportes que advirão. As que melhor conseguirem resolver de forma apoiada os seus PLD serão certamente as vencedoras da nova Europa.

Tal como foi possível integrar a localização e a distribuição, no futuro outros aspectos relacionados com a logística poderão ser interrelacionados num caminho que conduzirá ao modelo logístico global. É um percurso difícil e ainda no início mas a investigação humana avança inexoravelmente no sentido da global compreensão e domínio do mundo envolvente.

Capítulo 3

Revisão Bibliográfica Anotada

3.1 Artigos

Ao longo dos últimos 40 anos sucederam-se algumas dezenas de publicações tendo por objecto de estudo Problemas de Localização-Distribuição (PLD). Nesta secção é apresentada, com anotação, uma pesquisa bibliográfica constituída por 84 artigos publicados em revistas periódicas, livros ou disponíveis na *Internet*.

A busca de artigos sobre Localização-Distribuição pressupõe que seja possível efectuar uma identificação clara dos documentos com uma determinada área de investigação. Neste sentido, a definição 1 do capítulo anterior, embora simples, é muito redutora, desde logo por se restringir a PLD com dois níveis. A definição seguinte retrata, de forma mais geral o nosso objecto de busca.

Definição 2 *PLD Geral*

Todo o problema em que se pretende simultaneamente decidir sobre a localização de CA (em qualquer nível) e sobre o traçado de rotas/caminhos com apoio nos CA (em que pelo menos uma rota/caminho integra mais do que um cliente) é conotado como sendo um PLD.

Os indícios de que estavam a ser dados os primeiros passos no sentido da interligação entre a localização e a distribuição remetem aos anos 60 com os estudos de Maranzana [147][148] sobre problemas de localização, que consideravam percursos de distribuição¹ por mais do que um cliente. No entanto, estes e outros trabalhos pioneiros, sentiram desde logo a enorme dificuldade de resolução deste tipo de problemas, nomeadamente na determinação simultânea dos percursos de distribuição. Como consequência, propunham a redução dos PLD a simples problemas de localização, agrupando os clientes pertencentes ao mesmo percurso e estimando o seu custo a partir do custo da visita individual a cada cliente.

¹Neste caso concreto trata-se de percursos de transporte entre um cliente e um CA numa rede, isto é, passando por outros clientes.

Foi só na década seguinte que surgiram os primeiros estudos sobre PLD com integração dos reais percursos de distribuição e respectivos custos, isto é, verdadeiros PLD. Para uns [158], o primeiro estudo sobre PLD sem qualquer artifício de simplificação deve-se a Watson-Gandy e Dohrn [209], outros [206] indicam o trabalho pioneiro de Or e Pierskalla [174] sendo, pelo menos, Jacobsen e Madsen [109], Laporte e Nobert [132] e Perl e Daskin [177] também candidatos a esta honra. A verdade é que qualquer destes artigos é de grande importância para o estudo e desenvolvimento inicial dos PLD. Após este impulso inicial, seguiram-se anos de intensa pesquisa científica que geraram um grande número de publicações sobre PLD [13][12].

Embora tenham sido já publicados alguns trabalhos de revisão sobre PLD [146][145][8][127][158], nenhum deles se dedica em exclusivo à revisão bibliográfica. No geral, focam também a revisão algorítmica, taxonomia e chegam mesmo a propor métodos de resolução. Com excepção do trabalho de Min et al. [158], as revisões bibliográficas existentes não são anotadas, são pouco exaustivas deixando de foram muitos trabalhos e já acusam alguma desactualização. Numa altura em que a investigação em PLD atravessa um momento com menor número de trabalhos publicados, parece oportuno fazer uma revisão bibliográfica, o mais profunda possível, que facilite e promova um olhar histórico, clarifique e posicione as tendências da investigação e possa contribuir para um relançamento da actualidade e premência da investigação nesta área.

3.1.1 Classificação dos Artigos

Além da anotação dos textos sobre PLD é também proposta, neste capítulo, uma organização e classificação dos textos de forma a permitir uma visão mais compartimentada e objectiva sobre os mesmos e sobre o seu conteúdo. A figura 3.1 resume essa classificação organizada em três níveis. No primeiro, os textos são classificados quanto ao tema geral em que são predominantes. No segundo nível há uma classificação tendo em conta os métodos de resolução propostos para os respectivos problemas. Finalmente, no último nível, são separados segundo o problema específico em estudo.

Procurando traduzir de forma natural os diversos percursos de investigação, no primeiro nível, as referências bibliográficas foram agrupadas segundo 4 categorias.

Na primeira categoria, *estudos sobre os custos de distribuição*, surgem alguns trabalhos cujo tema de investigação são PLD mas que se dedicam, em especial, ao estudo dos custos das rotas de distribuição, nomeadamente desenvolvendo estimadores para as mesmas. São trabalhos de extrema importância uma vez que alguns algoritmos para resolução de PLD fazem uso de valores aproximados do custo das rotas.

A segunda categoria integra as publicações sobre revisão bibliográfica, taxonomias, classificações e revisão e avaliação dos métodos de resolução, tendo sido designada por *estudos de revisão*.

Os restantes estudos, ou seja, os que se dedicaram à investigação sobre PLD con-

cretos (reais ou teóricos), sem qualquer artifício de simplificação, são caracterizados segundo o tipo de percurso de distribuição. Os estudos que consideram PLD em que os veículos saem do CA, podem visitar mais do que um cliente e voltam ao mesmo CA, são designados por *PLD com rotas*. Por outro lado, os que apresentam problemas com veículos a efectuar percursos entre os clientes e os CA, entre os CA e os clientes ou entre um CA e outro CA passando por vários clientes, são agrupados numa categoria designada por *PLD com caminhos*.

Tal como é indicado na figura 3.1, a partir de uma categoria podem, ou não, emanar outras sub-categorias ocupando os níveis inferiores. Os artigos serão encaminhados para a categoria em que são predominantes, o que não quer dizer que artigos de uma categoria não possam apresentar características de outra; por exemplo Lawrence e Pengilly [138] também estudam o custo das rotas, apesar de pertencerem à categoria *estudos heurísticos (gerais)*. Quando assim acontece, o artigo será apresentado com anotação na categoria predominante e apenas referenciado nas restantes.

Em cada categoria os artigos são expostos respeitando a ordem cronológica e também a linha de investigação. Significa isto que, sempre que é introduzido um novo artigo, seguem-se, por ordem cronológica, todos os que estão directamente relacionados em termos de conteúdo da investigação, sejam eles do mesmo autor ou não.

Na figura 3.1, junto de cada classe de artigos é indicada uma referência. No primeiro nível as categorias são identificadas pelas referências A, B, C e D, no segundo nível por C.1, C.2, C.3 e assim sucessivamente. Servem estas referências para melhor distinguir e identificar as diversas categorias ao longo da revisão bibliográfica anotada que é apresentada na secção seguinte.

No apêndice C apresentam-se alguns resultados sobre a sequência cronológica das publicações, autores referenciados e meio de publicação.

3.1.2 Bibliografia Anotada

A. ESTUDOS SOBRE OS CUSTOS DE DISTRIBUIÇÃO

- Griffiths, D. O., 1968, *The Use of Regression Analysis in a Depot Location Exercise* [97].

É o primeiro artigo a revelar uma intenção clara de considerar um problema integrado de localização e distribuição através de rotas com mais do que um cliente. Apresenta um PLD com 3 níveis e, com base nos registos dos tempos de condução em percursos de distribuição múltiplos, usa a análise de regressão para estabelecer uma relação entre o tempo de distribuição numa rota e a Soma Instantânea² relativa aos clientes dessa rota. Estima, desta forma, o tempo de

²Tradução da designação inglesa "Moment Sum", referindo-se ao somatório das distâncias euclidianas entre os clientes e os depósitos a que se encontram afectos.

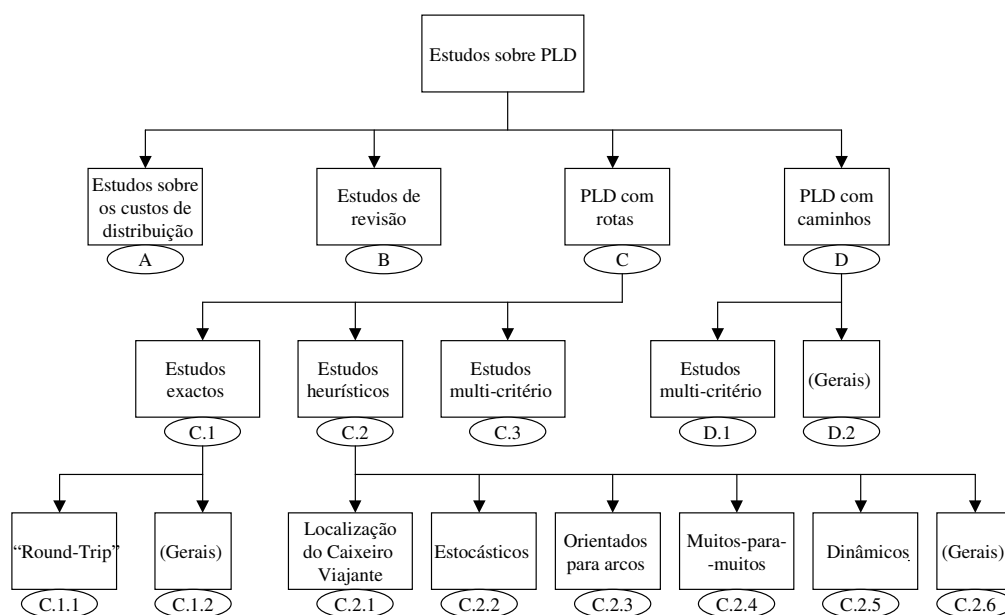


Figura 3.1: Mapa de organização dos textos sobre PLD.

distribuição de uma rota a partir da Soma Instantânea e independentemente da rota percorrida.

- Webb, M. H. J., 1968, *Cost Functions in the Locations of Depots for Multiple-Delivery Journeys* [210].

Estabelece uma relação entre a Soma Real³ e a Soma Instantânea determinando as rotas através do algoritmo de Clark e Wright [47]. Pela primeira vez, surgem encomendas dos clientes e um determinado número de veículos de capacidade definida. Para cada problema calculou a Soma Instantânea, a Soma Ponderada⁴ e a Soma Real. Concluiu que não é apropriado o uso da Soma Ponderada em substituição da Soma Instantânea. O seu trabalho aponta para uma forte correlação entre a Soma Instantânea e a Soma Real, mas verifica que conduzem a localizações distintas para os centros de distribuição. No entanto, este artigo não se mostra conclusivo. Os resultados de Webb apontam para a necessidade de considerar uma nova função de custo que designou por "função de custo planeado", em contraponto com a tradicional Soma Instantânea, especialmente em problemas com rotas de distribuição múltiplas, mas pouco especificou sobre esta nova função.

- Lawrence, R. M., Pengilly, P., 1969 [138].

³Somatório das distâncias efectivamente percorridas em todas as rotas.

⁴Somatório das distâncias directas ponderadas entre os clientes e os depósitos a que se encontram afectos. O coeficiente de ponderação utilizado foi o peso.

- *Christofides, N., Eilon, S., 1969, Expected Distances in Distribution Problems [46].*

Este artigo generaliza um outro, de Christofides, publicado em 1967 sobre a distância esperada num percurso do Caixeiro Viajante. Desta vez alarga o estudo a problemas de rotas de veículos a partir de um CA. Consideram um PLD constituído por n clientes aleatória e uniformemente distribuídos no plano e m veículos a posicionar num ponto do plano. Estabelecem uma relação clara entre a Soma Real e Soma Instantânea e verificam que, quando existe um grande número de clientes numa área ou quando o número de clientes por rota é pequeno, a localização do CA não varia muito quer se use uma ou outra. A fórmula usada por Christofides e Eilon para estimar a Soma Real tem sido alvo de muitos e variados estudos (existindo algumas extensões mais elaboradas), mostrando sempre uma robustez notável aos testes a que tem sido sujeita. Stokx e Tilanus [200] confirmam mais uma vez a sua eficiência em aplicações práticas.

- *Salhi, S., Rand, G. K., 1989, The Effect of Ignoring Routes when Locating Depots [188].*

Trata-se de um estudo sobre o efeito causado pela não consideração das rotas aquando da localização de CA. Aplicam vários algoritmos heurísticos (RDA [49], ALA [49] e DROP [73]) para determinar a melhor localização do/s CA com base na distância radial. De seguida, geram rotas para cada uma das localizações determinadas, usando um procedimento desenvolvido pelos autores [187]. Embora tenham concluído por uma certa consistência entre os resultados, a comparação entre os custos após a localização e após a obtenção das rotas não permite extrair qualquer tipo de correlação. Por vezes a pior solução de localização permite obter a melhor solução após a obtenção das rotas. No caso de um único CA os custos são representados pela Soma Instantânea e pela Soma Real. Para os restantes exemplos usam funções de custo específicas a fim de permitir uma comparação razoável entre os custos de localização e das rotas.

B. ESTUDOS DE REVISÃO

- *Madsen, O. B. J., 1981, A Survey of Methods for Solving Combined Location-Routing Problems [146].*

Trata-se do primeiro artigo de revisão e comparação dos métodos de resolução de PLD. Faz uma revisão das publicações existentes, em especial dos artigos [209][174] [18][109]. Conclui que existem poucos métodos para resolver PLD. O de Bednar e Strohmeier [18] é idêntico ao segundo de Jacobsen e Madsen [109], com uma diferença, na fase de localização-afectação Bednar e Strohmeier formam grupos usando o critério de mínima variância enquanto que Jacobsen

e Madsen usam a distância euclidiana. Isso significa que Bednar e Strohmeier penalizam um pouco mais os clientes mais afastados do CA. O procedimento de Or e Pierskalla [174] é também similar aos de Bednar e Strohmeier e Jacobsen e Madsen, excepto na implementação iterativa das duas fases. As heurísticas TREE-TOUR, ALA-SAV e SAV-DROP propostas em Jacobsen e Madsen são alvo de explicação pormenorizada. Propõe a primeira classificação das publicações de acordo com o método de resolução dos PLD.

- *Madsen, O. B. G., 1983, [145].*
- *Balakrishnan, A., Ward, J. E., Wong, R. T., 1987, Integrated Facility Location and Vehicle Routing Models: Recent Work and Future Prospects [8].*

Artigo de revisão em que não deixam de sugerir um modelo matemático para um PLD. Abordam a questão da determinação da função de custo das rotas, nomeadamente alguns estudos de carácter estocástico como o de Burness e White e outros que pretendem aproximar o custo das rotas com base nas características espaciais dos clientes como o de Eilon et al. [67]. Fazem uma abordagem aos algoritmos exactos de Laporte et al. [132][135] e referem os algoritmos heurísticos mais comuns [177][178][174][109]. Constatam em secção própria a grande complexidade deste tipo de problemas e abrem a porta para a utilização de funções de custo aproximado assim como de algoritmos sequenciais de localização-afecção e rotas de veículos, que permitam a integração de restrições de variabilidade das encomendas e janelas de tempo, sempre que os problemas devido à sua complexidade se revelem impraticáveis. Além disso, num contexto de planificação hierárquica de sistemas, em que estão em causa decisões estratégicas de longo prazo, pode ser desejável a abordagem sequencial. Os horizontes temporais distintos para a localização e distribuição são também motivo de referência.

- *Laporte, G., 1988, Location-Routing Problems [127].*

É uma revisão sobre os seus trabalhos e de outros autores na área da Localização-Distribuição. Pela primeira vez é proposta uma classificação do tipo posicional para PLD, em termos do número de níveis e do tipo de percurso de distribuição. Refere e comenta as várias aplicações a situações reais. Faz uma revisão dos algoritmos heurísticos e exactos, assim como das formulações para o caso simétrico e não simétrico e apresenta os resultados computacionais. É um trabalho de organização e de ponto da situação de uma linha de investigação até então fragmentada. Provavelmente é o trabalho mais citado e conhecido na área da LD, influenciando, condicionando e redireccionando todos os trabalhos futuros.

- *Laporte, G., 1989, A Survey of Algorithms for Location-Routing Problems [128].*

Faz um resumo dos algoritmos existentes para os PLD. Começa por descrever os

Problemas de Localização-Afectação (PLA), os Problemas de Rotas de Veículos (PRV) e os primeiros PLD, resolvidos como sendo PLA por recurso à estimativa do custo de cada rota. Usando a classificação posicional proposta no artigo anterior [127], apresenta os principais trabalhos sobre PLD. Continua com a exposição dos algoritmos heurísticos, classificados segundo as três etapas habituais: localização, afectação e distribuição. Desenvolve algumas formulações para PLD simétricos. As formulações com três índices são inspiradas em Problemas de Fluxo de Veículos enquanto que o Problema do Caixeiro Viajante está na base das formulações com dois índices, para as quais sugere algoritmos exactos baseados em processos de relaxação, na linha dos seus trabalhos anteriores.

- *Eiselt, H. A., Laporte, G., 1989, Integrated Planning in Distribution System [68].*

Este trabalho é apresentado pelos autores como sendo uma base para o estudo de problemas combinados de Localização-Distribuição. Referem o trabalho pioneiro de Eilon et al. [67] sobre a investigação analítica relacionada com a distribuição e baseiam um sistema de distribuição em entidades (níveis) e regras que governam os fluxos de bens entre estas entidades. Revêm os principais itens que entram na construção da função objectivo, nomeadamente os critérios de eficiência, equidade e preferência. Focam também as propriedades estocásticas e dinâmicas de alguns problemas. Efectuam uma revisão bibliográfica, recorrendo à classificação posicional de Laporte [127], sumariam alguns casos da vida real e discutem vários algoritmos exactos e heurísticos. Estes últimos, divididos em LAR ou ARL (L=Localização, A=Afectação dos clientes aos serviços, R=Rotas dos veículos).

- *Min, H., Jayaraman, V., Srivastava, R., 1998, Combined Location-Routing Problems: A Synthesis and Future Research Directions [158].*

Sintetizam os trabalhos e linhas de investigação anteriores e traçam sugestões para o futuro. Começam por apresentar uma taxonomia para os PLD, propondo dois tipos de classificação, uma em termos das perspectivas do problema e outra quanto aos seus desenvolvimentos algorítmicos. Fazem uma apresentação anotada dos diversos artigos, agrupados consoante as características indicadas na taxonomia. Por fim propõem um conjunto de futuras direcções de pesquisa.

C. PLD COM ROTAS

C.1. ESTUDOS EXACTOS

Predominam as propostas de resolução exacta de PLD.

C.1.1. "ROUND-TRIP"

Incidem sobre um PLD específico com rotas de distribuição que visitam dois clientes.

- Chan, A. W., Francis, R. L., 1976, *A Round-Trip Location Problem on a Tree Graph* [40].

Estudam um PLD numa árvore que envolve a localização de um serviço relativamente a um conjunto de pares de clientes de tal forma que, em cada percurso de distribuição, é visitado um único par. Desenvolvem um algoritmo que conduz a todas as soluções óptimas, minimizando a distância ponderada total.

- Chan, A. W., Hearn, D. W., 1977, *A Rectilinear Distance Round-Trip Location Problem* [41].

Artigo proposto para publicação antes do anterior [40]. Trabalham o mesmo problema, mas agora no plano, o qual designam por *Round-Trip Location Problem* (RTLTP). Propõem um algoritmo que fornece todas as localizações óptimas do problema, minimizando o somatório das distâncias rectilíneas ponderadas. Comparam os seus resultados com os obtidos pelo método do *simplex* e estudam casos especiais.

- Ghosh, J. K., Sinha, S. B., Acharya, D., 1981, *A Generalized Reduced Gradient Based Approach to Round-Trip Location Problem* [89].

Estudam um RTLTP contínuo que foi resolvido optimamente com recurso a um código *standard* (MINOS/GRG), de forma a minimizar as distâncias ponderadas totais. Concluem que a localização do CA é altamente sensível ao tipo de norma utilizada.

- Drezner, Z., Wesolowsky G. O., 1982, *A Trajectory Approach to the Round-Trip Location Problem* [65]

Abordam o RTLTP proposto por Chan e Hearn [41]. Apresentam um algoritmo baseado na resolução numérica de equações diferenciais que pode também ser aplicado a problemas com distâncias euclidianas ou mesmo métricas gerais l_p , em contraponto com o algoritmo de Chan e Hearn baseado em programação linear, aplicável somente a problemas com distâncias rectangulares.

- Drezner, Z., 1982. *Fast Algorithms for the Round Trip Location Problem* [61].

Apresenta vários algoritmos para o RTLTP. Simplifica e desenvolve o algoritmo de Chan e Hearn [41] e propõe um algoritmo exacto que generaliza para distâncias euclidianas e l_p . Os algoritmos são avaliados com vários testes computacionais.

- Ichimori, T., Nishida, T., 1985, *Note on a Rectilinear Distance Round-Trip Location Problem* [107].

Mostram que o RTLTP com N pares de clientes apresentado por Chan e Hearn [41] pode ser resolvido em tempo $O(N \log N)$.

- Drezner, Z., 1985, *$O(N \log N)$ Algorithm for the Rectilinear Round-Trip Location Problem* [62].

Expõe um algoritmo de complexidade $O(N \log N)$ para o RTLP com distâncias rectilíneas.

- Kolen, A., 1985, *The Round-Trip p -Center and Covering Problem on a Tree* [119].

Generaliza o RTLP para o caso de p CA, minimizando o somatório das distâncias ao CA mais próximo. Estuda também o *Round-Trip Covering Problem* que consiste em determinar o menor número de CA de tal forma que o custo total não exceda um determinado limite. Fornece algoritmos para resolução de ambos os problemas numa árvore.

C.1.2. ESTUDOS EXACTOS (GERAIS)

Restantes trabalhos sobre resolução exacta de PLD.

- Laporte, G., Nobert, Y., 1981, *An Exact Algorithm for Minimizing Routing and Operating Costs in Depot Location* [132].

Com este artigo é iniciada uma das principais linhas de investigação em PLD. Apresentam o primeiro algoritmo exacto para a resolução de um PLD com um único CA. É indicada uma formulação em programação linear inteira para o problema considerando a localização de um único CA e m percursos do caixeiro viajante a partir desse CA. A função objectivo é formada com base nos custos fixos da localização dos CA e nos custos de distribuição. A resolução recorre à relaxação linear das restrições de eliminação de sub-circuitos ilegais. As restrições relaxadas são introduzidas posteriormente à medida que se verifica a sua violação. A integralidade é restaurada recorrendo a procedimentos de *branch-and-bound*. Consideram problemas euclidianos e não euclidianos. Realizam testes com problemas gerados aleatoriamente com 20 a 50 clientes e 2 a 5 veículos. A dificuldade computacional aumenta à medida que o número de veículos disponíveis no CA aumenta. Facto curioso é que os autores referem este problema como sendo completamente novo; certamente não teriam conhecimento dos trabalhos anteriores de Or e Pierskalla [174] e de Jacobsen e Madsen [109], publicados depois de Laporte e Nobert apresentarem o seu artigo para publicação.

- Laporte, G., Norbert, Y., Pelletier, P., 1983, *Hamilton Location Problems* [135].

Generalizam o trabalho publicado em 1981. Desta vez consideram 3 tipos de problemas: problemas euclidianos em que o número de veículos por CA não é especificado, não euclidianos com um número de veículos por CA pré-definido e problemas em que é permitida a visita múltipla a um cliente. Relativamente

aos primeiros são ainda analisadas algumas variantes obtidas ao jogar com a presença/ausência de custos fixos nos CA e a limitação do número de CA. Apresentam algoritmos exactos na linha do que tinha sido proposto no artigo anterior, eliminando sub-circuitos e cadeias sempre que estes ocorrem e forçando a integralidade através da introdução de planos de corte. Resolvem problemas com dimensão até 50 clientes, obtendo até 13 CA nos problemas euclidianos. Nos problemas não euclidianos com 40 clientes, obtêm até 3 CA e até 3 veículos por CA.

- *Laporte, G., Nobert, Y., Arpin, D., 1986, An Exact Algorithm for Solving a Capacitated Location-Routing Problem [134].*

Estudam um PLD com número determinado de veículos por CA, encomendas de cada cliente e restrições de capacidade dos veículos. Incorporam as restrições de capacidade dos veículos nas restrições de eliminação de sub-circuitos e fazem uma explicação pormenorizada sobre as restrições de barramento de cadeias entre CA, propondo uma obtenção iterativa destas restrições. Apresentam um algoritmo exacto, na linha dos seus trabalhos anteriores. Resolvem problemas que variam entre 6 e 20 clientes e de 4 a 8 potenciais CA. Não restringem o número de veículos mas impõem limite superior do número de CA entre 3 e 5. Os resultados computacionais comprovam que à medida que diminui a capacidade dos veículos aumenta a dificuldade de resolução. Estes trabalhos sugerem algoritmos exactos que, no geral, resolvem eficientemente problemas de média dimensão, especialmente quando os custos de instalação dos CA são negligenciáveis e os veículos não apresentam restrições de capacidade. Em todos os exemplos, o número de restrições de sub-circuitos e de barramento de cadeias adicionadas é muito inferior ao número de restrições efectivas do problema.

- *Labbé, M., Laporte, G., 1986, Maximizing User Convenience and Postal Service Efficiency in Post Box Location [123].*

Apresentam um estudo sobre a localização de postos de correio em ambientes rurais e urbanos, minimizando a distância das rotas de recolha do correio e as deslocações dos utilizadores aos respectivos postos. No caso em estudo consideram somente uma rota de recolha e duas alternativas, com e sem zonas pré-definidas. Apresentam uma formulação linear binária para o problema e propõem um algoritmo exacto que, devido à complexidade do problema, só pode ser aplicado a problemas de dimensão moderada. Fazem uma constante analogia entre este problema e o Problema do Caixeiro Viajante Generalizado.

- *Laporte, G., Norbert, Y., Taillefer, S., 1988, Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems [136].*

Apresentam uma família de PLD não simétricos que designam por PLD com restrições de custo. Admitem um conjunto de potenciais CA distintos dos clientes, custos de operação em cada CA, procura definida em cada cliente, veículos com capacidade limitada e custos fixos iguais. O número de veículos baseados em cada CA deve manter-se entre limites pré-definidos e o custo de cada rota não pode exceder um determinado limite. Os custos foram calibrados de forma a permitir uma abordagem mono-critério. Recorrendo a uma transformação do grafo original formulam um problema equivalente, resolvido com recurso à criação de sucessivos sub-problemas de afectação restringidos de acordo com uma pesquisa em árvore do tipo *branch-and-bound*. Efectuaram testes computacionais sobre problemas com 20 a 80 clientes, 2 ou 3 potenciais CA e, no máximo, 2 veículos. Propõem testes em problemas que satisfazem a desigualdade triangular e problemas onde isso não acontece. É de realçar que os problemas com maior número de clientes têm tendência a admitir um único CA e também um só veículo. Com mais do que um CA, o tempo de resolução aumenta bastante devido à necessidade de eliminar rotas ilegais entre os CA. Os problemas que satisfazem a desigualdade triangular são mais difíceis de resolver, avançando os autores com uma possível explicação relacionada com a fraca variância no comprimento das diversas soluções admissíveis, que retira dominância à pesquisa em árvore originando um grande número de ramificações. A maior parte dos problemas foram resolvidos sem limite de custo por rota ou seja são PLD sem restrições de custo.

- *Laporte, G., Louveaux, F., Mercure, H., 1989, Models and Exact Solutions for a Class of Stochastic Location-Routing Problems [131].*

Neste artigo o tema é a resolução exacta de PLD com decisões primárias, decisões secundárias e encomendas aleatórias dos clientes. São estudados dois tipos de problemas de acordo com as restrições probabilísticas introduzidas. No primeiro a probabilidade de que falhe pelo menos uma vez uma rota planeada não excede um valor α . Num segundo problema, a penalidade esperada numa rota não excede uma fracção β do seu comprimento planeado. É de salientar que o objectivo não é minimizar o custo esperado das rotas e das decisões de localização numa perspectiva estocástica. Em vez disso, pretende-se assegurar um controlo sobre a frequência das falhas nas rotas e sobre as respectivas penalidades esperadas dos custos. A resolução teve por base um algoritmo do tipo *branch-and-bound* adaptado, permitindo a obtenção de soluções de problemas com 30 clientes e 3 potenciais CA.

- *Wong, D. W. S. and Meyer, J. W., 1993, A spatial decision support system approach to evaluate the efficiency of meals-on wheels program [212].*

Estudam um problema concreto relacionado com a distribuição de alimentos por

peessoas idosas e carenciadas na região de Connecticut, a partir de uma base onde são confeccionados. Os autores pretendem demonstrar que o uso de Sistemas Espaciais de Suporte à Decisão baseados no Sistema Geográfico Internacional (GIS) é fácil, acessível, pode aumentar a eficiência e diminuir os custos de distribuição, afectação e localização. Usando uma *package* comercial (TransCad) determinam rotas óptimas para os distribuidores de alimentos sob restrições de tempo e capacidade. Afectam novos clientes a rotas existentes e propõem uma nova localização para a "cozinha". Apesar de ser um problema integrado de localização-distribuição, recorrem à resolução em separado das várias componentes.

C.2. ESTUDOS HEURÍSTICOS

Publicações que propõem a resolução aproximada de PLD.

C.2.1 LOCALIZAÇÃO DO CAIXEIRO VIAJANTE

Sobre um PLD específico em que se pretende determinar a localização de um único CA e construir uma só rota.

- *Burness, R. C., White, J. A., 1976, The traveling Salesman Location Problem [35].*

É um trabalho sobre a localização de um CA e consequente distribuição por um percurso do caixeiro viajante, servindo encomendas estocásticas. Foram possivelmente os primeiros a estudar um PLD com características probabilísticas que designaram por Problema de Localização do Caixeiro Viajante (PLCV). Consideram um problema no plano com duas variantes, uma com distâncias rectilíneas e outra com distâncias euclidianas. Apresentam uma formulação em programação linear inteira e sugerem um algoritmo heurístico para resolução do problema no plano, construindo uma função objectivo com base na probabilidade de ocorrência de um determinado percurso. Uma vez que esta probabilidade é calculada após a resolução do PCV em cada subconjunto de clientes, o processo é computacionalmente pouco praticável, a não ser que o número de clientes seja pequeno.

- *Berman, O., Simchi-Levi, D., 1986, Minisum Location of a Travelling Salesman [23].*

Estudam um PLCV cujo objectivo é determinar a localização de um serviço numa rede a partir do qual um indivíduo deverá visitar uma série de clientes, que fazem parte de uma lista de chamadas probabilísticas, minimizando o comprimento esperado do percurso. Para uma rede em árvore e considerando que todos os clientes fazem parte da lista de visitas, desenvolvem um algoritmo de complexidade $O(n)$.

- *Berman, O., Simchi-Levi, D., 1988. Finding the Optimal a Priori Tour and Location of a Traveling Salesman with Nonhomogeneous Customers [24].*

Trata-se de um artigo na linha da sua publicação anterior [23] mas, desta vez, com uma resolução do tipo *à priori*, isto é, os clientes devem ser visitados segundo uma ordem pré-definida. Sendo assim, pretende-se determinar uma localização óptima para um serviço que minimize o comprimento esperado da rota *à priori*, em que cada cliente gera uma chamada com uma determinada probabilidade. O algoritmo de resolução é do tipo *branch-and-bound* mas admitem que, para problemas de elevada dimensão, a abordagem heurística deve ser considerada.

- *Simchi-Levi, D., Berman, O., 1988, A heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Location Problem on Networks [196].*

O problema é idêntico ao já tratado por Burness e White [35], admitindo representação em rede (localização discreta). Constroem uma heurística que usa uma aproximação para determinar o comprimento do percurso do caixeiro viajante, fugindo assim à necessidade de determinar um grande número de percursos. Uma análise de pior caso revela que os desvios são, no máximo, 50% da solução óptima e raramente 10% pior que a solução óptima. Usando os conhecimentos adquiridos com a construção da heurística, extrapolam alguns resultados para o problema no plano (contínuo), concluindo que, para um número de clientes muito elevado, a distância percorrida é independente da localização dos clientes.

- *Bertsimas, J., Jaillet, P., Odoni, A. R., 1990, A Priori Optimization [25].*

Referem-se a PLD estocásticos, integrados numa classe de problemas que designam por problemas probabilísticos de optimização combinatória e cuja característica comum é a inclusão explícita de elementos probabilísticos na sua definição. Trata-se de um PLCV com n clientes, em que cada dia um sub-conjunto S de clientes faz encomendas que devem ser servidas com uma determinada probabilidade. É um trabalho original, no sentido em que é proposto um método de resolução que pretende encontrar soluções, para determinadas instâncias de um problema, sem recorrer à sua resolução mas apenas com base em soluções de outra/s instância/s. A estratégia de resolução passa por encontrar uma localização e um percurso *à priori*, que sirva todos os clientes, a partir do qual se resolvem outras instâncias retirando os clientes que, em cada dia, não fizeram encomendas. Designam este processo por *A Priori Optimization*.

- *Simchi-Levi, D., 1991, The Capacitated Traveling Salesman Location Problem [195].*

Estuda modelos probabilísticos em que o número de clientes e as suas encomendas sofrem variações diárias. São problemas cuja resolução é ainda mais difícil do que

a sua vertente determinística. Consideram pela primeira vez várias rotas emanadas do CA, uma capacidade limitada nos veículos e também rotas com a menor distância possível. O autor designou o problema como PLCV com Capacidade, propondo uma abordagem heurística do problema discreto que também pode ser aplicada a problemas contínuos com distâncias rectilíneas ou euclidianas.

- *Jamil, M., Batta, R., Malon, D., 1994. The Traveling Repairperson Home Base Location Problem [111].*

Consideram um PLCV com chamadas de serviço que chegam de acordo com um processo de Poisson. Apesar de se tratar de um PLD, consideram que os percursos de distribuição ocorrem segundo a ordem de chegada das chamadas, retirando ao problema a decisão sobre a distribuição.

- *Berman, O., Jaillet, P., Simchi-Levi, D., 1995, Location-Routing Problems with Uncertainty [22].*

Apresentam um conjunto de resultados (até então dispersos por várias publicações) sobre o PLCV, considerando que o número de clientes é estimado e as suas encomendas obedecem a uma distribuição de probabilidade. A proposta de resolução é faseada, integrando as três etapas clássicas: determinação do número e localização dos centros, afectação dos clientes aos centros e determinação das rotas dos veículos. A partir da minimização de uma função de custo determinam o número de centros a instalar. De seguida localizam estes CA no centro de áreas hexagonais (localização contínua) e afectam cada cliente ao centro mais próximo. Usam um procedimento heurístico para determinar as rotas de distribuição numa base diária. Reconhecem alguma dificuldade em avaliar a eficácia do processo de resolução proposto.

- *Stowers, C. L., Palekar, U. S., 1993, Location Models with Routing Considerations for a Single Obnoxious Facility [201].*

O estudo da localização de serviços desagradáveis, assim como das rotas de recolha é o tema deste artigo. Na linha dos trabalhos anteriores nesta área, consideram uma abordagem bi-objectivo que inclui o risco de exposição (induzido pela localização e pelo transporte) e o custo. Uma vez que a localização das estações não é restringida a um conjunto de potenciais candidatos, estamos em presença de um PLD contínuo. Consideram três tipos de instâncias, com exposição somente durante o transporte e populações uniformes concentradas nos nodos. Realizam testes computacionais e avaliam a sensibilidade face a alguns parâmetros. Trata-se de um PLD com um só CA e rota única.

- *Averbakh, I., Berman, O., 1994, Routing and Location-Routing p-Delivery Men Problems on a Path [6].*

Trabalham sobre PLD numa *path network*. Está em causa a localização de um ou vários CA e a determinação dos percursos de distribuição que minimizam os tempos de espera dos clientes. Para este problema, que designaram por Problema de Localização-Distribuição do p -Distribuidor, apresentam um algoritmo que o resolve em tempo $O(n^2)$ e $O(n^4)$, para um só CA e multi-CA, respectivamente.

- Averbakh, I., Berman, O., 1995, *Probabilistic Sales-Delivery Man and Sales-delivery Facility Location Problems on a Tree* [7].

Continuam o trabalho iniciado no artigo anterior [6], alargando o estudo a PLD numa árvore. Está em causa um problema em que se procura localizar um CA e construir um percurso do CV que minimize o tempo de espera (esperado) dos clientes. Trata-se de um PLD com um CA, uma rota e encomendas probabilísticas. Seguem duas estratégias de resolução, *à priori* e reoptimização; no entanto, defendem claramente a primeira. Apresentam um algoritmo polinomial de complexidade $O(n \log n)$.

C.2.2. ESTOCÁSTICOS

PLD que envolvem parâmetros aleatórios (custos, distâncias, encomendas, tempo, etc.).

- Burness, R. C., White, J. A., 1976 [35].
- Harrison, H., 1979, *A Planning System for Facilities and Resources in Distribution Networks* [103].

Trata-se de um estudo relacionado com uma grande empresa Irlandesa que se dedica à distribuição de produtos farmacêuticos. É proposto um modelo de programação estocástico (incerteza nos custos e encomendas) em três etapas. A primeira é constituída por um gerador matricial, a segunda integra um modelo de programação matemática e a última um modelo de planificação das rotas. Embora se trate de um PLD, não é efectuado um estudo integrado da localização e distribuição. De forma separada é determinado um novo esquema de distribuição para os CA existentes, localizações alternativas para os CA tendo em conta as encomendas dos clientes e avaliada a sensibilidade do sistema ao custo unitário de transporte, às restrições de capacidade dos CA e às encomendas dos clientes. Resolvendo um problema com 1200 clientes foram alcançadas poupanças de 23,3% nos custos de distribuição e de 20% nos custos de transporte.

- Drezner, Z., Steiner, G., Wesolowsky, G. O., 1985, *One-Facility Location with Rectilinear Tour Distances* [64].

Consideram um PLD com um CA, distâncias rectilíneas, encomendas probabilísticas e um reduzido número de clientes por rota (3 ou menos). Aplicam um

método heurístico de resolução que se revela eficaz, desde que não seja necessário formar muitos percursos com mais de 3 clientes.

- *Berman, O. e Simchi-Levi, D., 1986 [23].*
- *Daskin, M. S., 1987, Location, Dispatching, and Routing Models for Emergency Services with Stochastic Travel Times [57].*

Estudo sobre serviços de emergência médica, em que está em causa a localização de bases para os veículos e a determinação de caminhos de assistência às emergências de forma a reduzir o tempo de resposta. Formula um problema multi-objectivo de localização, despacho e determinação das rotas para o caso em que dois veículos são chamados, considerando os tempos de viagem estocásticos. O modelo inicial, não linear na função objectivo e de resolução bastante difícil, foi substituído por outro, eliminando as variáveis de rota através do isolamento de objectivos específicos. O algoritmo de resolução é heurístico; usa um algoritmo de substituição de vértices e foi testado sobre um pequeno problema com 21 nodos.

- *Berman, O., Simchi-Levi, D., 1988 [24].*
- *Simchi-Levi, D., Berman, O., 1988 [196].*
- *Laport, G., Louveaux, F., Mercure, H., 1989 [131].*
- *Bertsimas, J., Jaillet, P., Odoni, A. R., 1990 [25].*
- *Simchi-Levi, D., 1991 [195].*
- *Averbakh, I., Berman, O., 1994 [6].*
- *Averbakh, I., Berman, O., 1995 [7].*
- *Berman, O., Jaillet, P., Simchi-Levi, D., 1995 [22].*
- *Chan, Y., Carter, W. B., Burness, M. D., 2001, A Multi-Depot, Multi-Vehicle, Location-Routing Problem with Stochastically Processed Demands [42].*

Trabalho sobre um PLD estocástico com múltiplos CA, múltiplos veículos e encomendas que, não sendo estocásticas no sentido tradicional, são geradas através de um processo de redes de filas de espera nos locais de procura. Os algoritmos heurísticos apresentados são sempre comparados com a solução determinística. Os problemas em teste são baseados em dados reais relacionados com a evacuação em tempo real de militares em várias cidades americanas.

C.2.3. ORIENTADOS PARA ARCOS

Trabalham um PLD específico em que os clientes são representados pelos arcos de uma rede e não pelos nodos.

- Levy, L., Bodin, L., 1989, *The Arc Oriented Location Routing Problem* [141].

Estudo sobre um PLD orientado para arcos (*arc-routing*). Este estudo foi motivado pela problemática da distribuição de correio em que o carteiro tem como "clientes" as ruas da sua área de serviço. Os CA são representados pelo veículo do carteiro, a partir do qual este iniciará a pé o/s percurso/s de distribuição. O tratamento heurístico do problema é sequencial, do tipo localização→afecção→rotas (LAR). O algoritmo foi testado em problemas de distribuição de correio com 206 nodos e 564 arcos.

- Ghiani, G., Laporte, G., 1999, *Eulerian location problems* [87].

Investigam um problema combinado de localização e distribuição com rotas orientadas para os arcos que designam por *Location Rural Postman Problem*. Analisam o problema com e sem limite superior do número de CA. Propõem uma transformação do grafo que suporta o problema no sentido da sua simplificação e apresentam um algoritmo exacto do tipo *branch-and-cut* para a sua resolução.

- Ghiani, G., Laporte, G., 2001, *Location-Arc Routing Problems* [88].

Fazem um ponto da situação relativamente à investigação sobre este sub-grupo de PLD. Enumeram as áreas mais frequentes de aplicação como sendo a distribuição de correio, recolha de lixo e manutenção de estradas. Confirmam a dificuldade em resolver exactamente problemas com mais de 100 vértices em que o número de CA é limitado superiormente. Fazem também uma análise sobre os diversos tipos de procedimentos heurísticos existentes, concluindo que o melhor caminho consiste em construir rotas primeiro e localizar os serviços de seguida. Foram obtidos melhores resultados combinando a distribuição e a afectação (RA,L) em vez de combinar a afectação com a localização (R,AL).

C.2.4. MUITOS-PARA-MUITOS

Estudam PLD em que os clientes recebem e fornecem encomendas. Percursos de distribuição e recolha.

- Nagy, G., Salhi, S., 1998, *The Many-to-Many Location-Routing Problem* [166].

Estudam um PLD com dois níveis em que todos os clientes são considerados potenciais terminais com custos de instalação e de manutenção conhecidos, cada cliente recebe encomendas dos outros clientes e envia também para outros clientes. Os tempos de carga e descarga em cada cliente são conhecidos, existindo uma frota de veículos com custos definidos. A este problema chamaram PLD *many-to-many*. Além das rotas a partir dos CA que entregam e/ou recolhem pelos clientes, existem também ligações directas entre todos os CA em veículos de custo de transporte reduzido. Cada cliente deve ser visitado por, pelo menos,

um veículo, mas pode também ser visitado por dois, um para as entregas e outro para as recolhas. Cada veículo faz um único percurso, tem uma determinada capacidade e existe uma distância máxima para cada rota. É um PLD complexo cuja interligação com os vários PLD é ilustrada, propondo as reduções e extensões necessárias para os alcançar. Apresentam uma formulação em programação linear inteira mista partindo da formulação para o PLD indicada por Laporte [128]. Sugerem uma resolução heurística recorrendo a um englobamento do processo de distribuição no problema principal de localização. O método foi testado num problema com 249 clientes e cerca de 10 potenciais CA, usando a solução extraída do método sequencial como solução inicial. A solução inicial sofreu uma melhoria de cerca de 6%.

C.2.5. DINÂMICOS

Estudos sobre PLD dinâmicos, isto é, com algum grau de variação ao longo do tempo.

- *Laporte, G., Dejax, P. J., 1989, Dynamic Location-Routing Problems [130].*

Fazem uma análise dos PLD dinâmicos, ou seja, problemas em que se pretende resolver uma série de PLD ao longo de um horizonte temporal constituído por vários períodos previamente definidos. Consideram problemas que envolvem um único produto e um só meio de transporte. São problemas que podem ocorrer quando a distribuição espacial dos clientes e/ou a procura variam significativamente no tempo. Apresentam uma rede especialmente construída para incluir as particularidades deste tipo de problemas e dois algoritmos, um exacto e outro heurístico. Não são apresentados exemplos de aplicação do algoritmo exacto, remetendo para exemplos comparáveis em [136]; no entanto alertam para a necessidade de ser pequeno o número de clientes e serem conhecidos todos os dados. O algoritmo heurístico faz uso da estimação do comprimento das rotas e foi testado num problema com dois períodos, 400 clientes uniformemente distribuídos e dois potenciais CA em cada período. Os veículos podem visitar no máximo 25 clientes cada. Combinam os métodos de Eilon et al. [67] para determinar a distância esperada em cada rota com processos de partição da área em zonas servidas por cada veículo.

- *Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1989 [169].*
- *Salhi, S., Nagy, G., 1999 [186].*

C.2.6. ESTUDOS HEURÍSTICOS (GERAIS)

Restantes publicações que abordam a resolução heurística de PLD e não se enquadram nas categorias anteriores.

- *Lawrence, R. M., Pengilly, P., 1969, The Number and Location of Depots Required for Handling Products for Distribution to Retail Stores in South-East England [138].*

Estudam um PLD com 3 níveis relacionado com uma companhia que opera no Sudeste de Inglaterra, onde possui 3 fábricas. Pretende-se determinar a localização dos CA, a sua dimensão e rotas de distribuição pelos clientes. É permitida a distribuição a partir de uma fábrica e trasfega entre um veículo de transporte e veículos de distribuição quando os clientes estão mais afastados. Face às dificuldades em determinar os percursos de distribuição do Caixeiro Viajante a partir dos CA, optam por um agrupamento dos clientes em sub-áreas com custo igual de tal forma que podem ser servidos por um só veículo. Colapsam os clientes num único ponto e resolvem, de seguida, um problema de localização usando um procedimento de pesquisa iterativo. Propõem ainda uma função de custo para as sub-áreas.

- *Wren, A., Holliday, A., 1972, Computer Scheduling of Vehicles From One or More Depots to a Number of Delivery Points [213].*

Trata-se de um estudo sobre rotas de veículos que aplicam a um problema concreto de uma companhia que, estando em dúvida sobre a escolha da localização de um CA entre duas localizações possíveis, deseja conhecer os custos de cada opção. O algoritmo heurístico foi aplicado a cada uma das possíveis localizações dos CA e os resultados avaliados comparativamente. Os resultados permitem antever o número de veículos necessários em cada CA e as rotas seguidas por cada um. Referem que o algoritmo foi usado pela mesma companhia para avaliar outros problemas que chegaram a ter 4 CA, 320 localizações de clientes e outras complexidades tais como velocidade média, dimensão dos veículos e prioridade atribuída aos clientes. Em suma, avaliam cada possível localização e escolhem a melhor. Contradizem a ideia generalizada de que os PLD são a evolução lógica dos Problemas de Localização e dos Problemas de Rotas de Veículos. Segundo os autores, os PLD são os precursores do estudo dos Problemas de Rotas de Veículos com múltiplos CA. Os problemas de localização permitiram uma consciencialização progressiva da necessidade de interligação com as rotas de distribuição conduzindo aos PLD que, por sua vez, dependiam do desenvolvimento de métodos eficientes para a resolução dos problemas de rotas de veículos.

- *Watson-Gandy, C. D. T., Dohrn, P. J., 1973, Depot Location with Van Salesman – A Practical Approach [209].*

É apresentado o estudo de um problema concreto de localização-distribuição com 2 níveis relacionado com uma empresa do ramo alimentar. São avaliadas várias hipóteses de localização dos CA no sentido de escolher, por um processo de "ten-

tativa e erro", a que proporciona maior proveito à companhia. Não procuram otimizar o modelo mas sim avaliar várias configurações diferentes, considerando uma função objectivo formada com base no resultado das vendas, custos de distribuição local, custos de transporte das fábricas para os CA e custos dos CA. Com ligeiros ajustamentos, usam as propostas de Christofides e Eilon [46] para estimar os custos de distribuição.

- Or, I., Pierskalla, W. P., 1979, *A Transportation Location-Allocation Model for Regional Blood Banking* [174].

Incidem o seu estudo sobre um PLD concreto, relacionado com a localização de bancos de sangue na região metropolitana de Chicago, a partir dos quais partem veículos de distribuição pelos hospitais. Pretendem os autores estabelecer o número de bancos de sangue a instalar, a sua localização, a afectação dos hospitais aos bancos e as rotas de distribuição a partir destes. Consideram dois tipos de rotas, do caixeiro viajante e de ida e volta, com custos específicos. O modelo também incorpora custos relacionados com o número de requisições dos hospitais afectos a um determinado banco de sangue. As necessidades dos hospitais são determinísticas. Estabelecem limites máximos para o número de veículos, capacidades e comprimento das rotas. Numa tentativa de aliviar a dificuldade computacional do problema, introduzem algumas hipóteses de simplificação do modelo. Definem previamente um determinado número de bancos a instalar, retirando ao modelo alguma liberdade e testam sucessivamente várias alternativas de localização, entretanto enumeradas, concentrando-se exclusivamente nas decisões de afectação e distribuição. Também estabeleceram uma periodicidade diária para as entregas, aliviando o seu carácter dinâmico. Apresentam a primeira formulação em programação linear inteira de um PLD (formulação em termos de fluxo) e propõem uma resolução heurística, recorrendo à resolução iterativa de dois sub-problemas do problema original, o problema da determinação das múltiplas rotas de distribuição e o problema de afectação dos hospitais aos bancos de sangue.

- Jacobsen, S. K., Madsen, O. B. G., 1980, *A Comparative Study of Heuristics for a Two-Level Routing-Location Problem* [109].

Foram os primeiros a usar a designação *Routing-Location Problems*. O seu trabalho incide sobre um PLD concreto, com três níveis, relacionado com a distribuição de jornais na Dinamarca. A partir do local de impressão, os jornais são enviados para locais de trasfega em veículos de grande porte, que servem entre um e três pontos de transferência. Finalmente a distribuição entre os pontos de transferência e os 4510 clientes é efectuada em veículos de menor dimensão. Os pontos de transferência a determinar podem ser localizados em qualquer ponto

sem custos. O custo de distribuição é composto por um custo fixo e um custo dependente da distância. Cada cliente tem um horário limite para ser servido, sendo as restrições de tempo também uma novidade. São ainda introduzidas restrições de taxa de produção, capacidade e duração dos percursos secundários. Pretende-se determinar as rotas a partir do local de impressão para os pontos de transferência, definir o número e localização dos pontos de transferência e traçar as rotas entre os pontos de transferência e os locais de venda ao público de forma a minimizar o custo das rotas percorridas. Foi o primeiro estudo sobre um PLD com três níveis que enfrenta a sua resolução sem o desvirtuar com simplificações. De forma bastante objectiva e eficaz, utilizaram três procedimentos heurísticos já conhecidos ALA-SAV, SAV-DROP e TREE-TOUR. O modelo ALA [49][181] usa afectações a partir de um modelo *standard* de localização-afecção em que são escolhidas localizações para um número fixo de CA e cada cliente é afecto ao CA mais próximo de forma a minimizar a Soma Instantânea. A parte SAV [47] aplica uma heurística de escalonamento de veículos do tipo *saving* a cada CA e seus clientes. A heurística SAV-DROP agrupa inicialmente os clientes nas suas rotas aplicando uma heurística do tipo *saving* a todos os clientes e ao CA central. A primeira paragem em cada rota é então considerada como sendo a localização do CA que servirá unicamente a rota respectiva. Depois são testados outros potenciais CA nas rotas podendo os existentes ser retirados (*Dropped*) [73]. A heurística *tree-tour* determina simultaneamente a localização dos CA e as rotas dos veículos a partir da construção de uma árvore de rotas suportando todos os clientes. A árvore de suporte tenta minimizar o custo total, enquanto preserva as características da árvore necessárias à identificação dos clientes com os CA e à satisfação das restrições relacionadas com os veículos. As heurísticas ALA-SAV e SAV-DROP superaram claramente a TREE-TOUR.

- Madsen, O. B. G., 1983, *Methods for Solving Combined Two Level Location-Routing Problems of Realistic Dimensions* [145].

É um artigo que complementa o anterior [109], com uma revisão sobre a literatura existente neste domínio e uma referência ao PLD com dois níveis. São revistos os mesmos processos heurísticos de resolução do artigo anterior propondo uma abordagem mais geral, isto é, o estudo é efectuado partindo do problema matemático para a aplicação prática, que continua a estar relacionada com a distribuição de jornais na Dinamarca.

- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1981, *A Large Scale Location-Allocation Problem in the Natural Rubber Industry* [168].

Estudam um PLD real relacionado com a indústria da borracha natural na Malásia. Pretendem determinar a localização de fábricas de processamento de bor-

racha, a afectação a essas fábricas de estações de recolha com localização fixa e o estabelecimento de rotas de recolha, a partir das fábricas, pelas estações de recolha. Trata-se de uma aplicação de um PLD com o objectivo de minimizar a soma dos custos das viagens, custos das horas extraordinárias e os custos fixos de operação das fábricas e dos veículos. Neste problema existe um número máximo de veículos em cada fábrica com capacidade conhecida, uma quantidade fixa em cada estação de recolha, tempo de viagem entre nodos, tempo máximo por rota, tempo máximo de horas extras por dia e por camião e ainda janelas de tempo devido à característica perecível do produto. Propõem uma formulação matemática para o problema que, como quase todos os problemas reais é bastante complexo. A abordagem heurística foi a escolhida pelos autores, decompondo o problema em duas partes, uma de localização e outra de construção das rotas de veículos que interagem procurando a admissibilidade das restrições de capacidade e tempo. Uma primeira heurística divide as estações de recolha em grupos e impõe que cada grupo seja afecto a uma única fábrica. Os grupos são formados tendo em conta as restrições de capacidade das fábricas e de tempo. É resolvido o PCV para cada grupo e cada potencial localização de uma fábrica e desta forma enumerativa escolhida a melhor afectação de grupo-fábrica. Finalmente é aplicada uma heurística de melhoramento das rotas do tipo *saving* [47]. Para os casos em que as estações de recolha são esparsas, e é necessário instalar mais do que uma fábrica, é apresentada outra heurística, que não agrupa as estações por áreas, mas procura alcançar um compromisso entre as vantagens obtidas com economias de escala *versus* melhores rotas de veículos. Os testes efectuados reduzem-se a um pequeno problema com dados reais, composto por 50 estações de recolha e 6 potenciais localizações de fábricas.

- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1989, *Plant Location and Vehicle Routing in the Malaysian Rubber Smallholder Sector: A Case Study* [169].

Mais uma vez sobre a indústria da borracha natural da Malásia mas, relativamente ao artigo anterior [168], há todo um trabalho de aperfeiçoamento do modelo com base numa recolha de dados mais profunda e uma clarificação da sua estrutura, separando as etapas de localização, afectação e rotas de veículos. A necessidade de mostrar resultados imediatos conduz ao tratamento das rotas de veículos em detrimento da localização. Sendo as rotas definidas numa base diária, os seus resultados são sentidos de imediato e podem contribuir para incentivar os responsáveis a efectuar estudos mais completos. Os métodos de rotas de veículos foram aplicados numa sub-região contendo 50 estações de recolha que servem uma fábrica. Os resultados são avassaladores e permitem uma redução da distância percorrida de até 32%. Consideram um problema real com 89 estações de recolha e 10 possíveis localizações de fábricas e aplicam um procedimento baseado no

dual para resolver o problema da localização-afecção relaxando as restrições de capacidade das fábricas e de tempo das rotas. A admissibilidade destas restrições é introduzida mais tarde. Também aqui a economia de custos de recolha é da ordem dos 50% ao passar de uma fábrica para três. O caso dinâmico também é estudado propondo soluções para um horizonte temporal de 10 anos.

- *Perl, J., Daskin, M. S., 1984, A Unified Warehouse Location-Routing Methodology [177].*

Juntamente com os artigos [174][109][168] forma uma quadriologia de clássicos incontornável. Apresentam um PLD com alguma complexidade, admitindo encomendas dos clientes de um único produto, custos de instalação dos CA repartidos por custos fixos e variáveis, custos de camionagem e capacidade limitada dos CA. É estabelecido um número máximo de veículos e são incluídas variáveis específicas para cada veículo. Os custos de distribuição são euclidianos e todos os veículos têm a mesma capacidade e parâmetros de custo. Pretende-se determinar o número, dimensão e localização dos CA, a afectação dos clientes aos CA e as rotas de distribuição, de forma a minimizar os custos de transporte e de armazenagem. Apresentam uma formulação matemática que veio a servir de referência em inúmeras publicações. Sugerem uma resolução heurística em três fases, recorrendo à resolução sequencial de três sub-problemas. Numa primeira fase, o problema é inicializado, resolvendo um problema de rotas de veículos, assumindo que todas as potenciais localizações de CA são usadas. Nesta fase são obtidas rotas iniciais de custo mínimo satisfazendo as capacidades dos veículos mas ignorando os custos fixos dos CA, as suas capacidades e custos de actividade. O objectivo desta primeira fase é formar um conjunto inicial de rotas que minimize o custo total de distribuição e que servirá de *input* para a fase seguinte. De seguida resolve iterativamente dois subproblemas. Em primeiro lugar, resolve optimamente, usando enumeração implícita, o Problema da Localização-Afecção de CA. Nesta fase são localizados e dimensionados os CA, afectando-lhes as rotas anteriormente determinadas. Uma vez que a rota é afectada por inteiro a um CA, os únicos custos relevantes têm a ver com a distância entre o primeiro e último cliente da rota e o CA. O conjunto de CA abertos serve como entrada para a terceira fase (resolvida heurísticamente) em que cada cliente é reafectado a um dos CA abertos e determinadas as melhores rotas a partir dos CA para os seus clientes. As duas últimas fases são aplicadas iterativamente até que não seja possível alcançar uma melhoria no custo total.

- *Perl, J., Daskin, M. S., 1985, A warehouse Location-Routing Problem [178].*

Recuperam e revêem o trabalho anterior, realizam testes detalhados sobre um problema com 55 clientes e 15 potenciais CA. Concluem que problemas com

menor número de potenciais CA podem ser resolvidos mais facilmente. Também apresentam um estudo de uma aplicação em larga escala à indústria americana mas somente com duas potenciais localizações de CA.

- *Bookbinder, J., Reece, K. E., 1988, Vehicle Routing Considerations in Distribution System Design [30].*

Propõem uma resolução baseada no método de decomposição de Benders, para um PLD complexo que inclui 3 níveis, restrições de capacidade e vários produtos. A abordagem do problema tem por base o algoritmo de Geoffrion e Graves [83] com algumas adaptações nomeadamente ao nível da determinação das rotas em que é usado o algoritmo de Fisher e Jaikumar [76]. É uma técnica que assenta no procedimento clássico e sequencial de localização-afecção primeiro, distribuição depois. O PLD foi formulado em programação não linear inteira mista e a sua solução recorre à decomposição de Benders para separar as componentes de localização e distribuição [206]. A solução permite conhecer a rota de cada veículo, o tipo de veículo (capacidade) a utilizar e o número de veículos de cada tipo necessários em cada centro de distribuição, além do número e localização dos CA. O algoritmo é iniciado com a localização-afecção, depois determina as rotas dos veículos e finalmente resolve o problema de transportes em cada rota. Foram realizados testes em 11 problemas gerados aleatoriamente que integram 2 produtos (com volume diferente), 5 e 6 clientes, 4 candidatos a CA (dos quais foram escolhidos 2). Os CA diferem na capacidade e nos custos fixos e variáveis para cada produto. Existem também dois camiões com capacidades distintas e custos fixos e variáveis. A qualidade da solução obtida ou mesmo a obtenção da solução óptima dependem em grande parte da solução admissível inicial. Para contornar este problema os autores sugerem algumas técnicas a incluir no algoritmo. Nos poucos casos em que é conhecida a solução óptima os resultados obtidos não diferem mais de 2%.

- *Hansen, P. H., Hegedahl, B., Hjortkjaer, S., Obel, B., 1994, A Heuristic Solution to the Warehouse Location-Routing Problem [102].*

Tem por objecto de estudo o PLD proposto e formalizado por Perl e Daskin [178]. O estudo está relacionado com a indústria química. Apresentam uma formulação em programação linear inteira mista que permite reduzir drasticamente o número de restrições da formulação em programação linear inteira sugerida por Perl e Daskin. O método de resolução tem por base o que foi proposto em [176] e [178]. Fazem uma decomposição do problema em três sub-problemas, que são resolvidos sequencialmente e iterativamente com recurso a uma abordagem heurística (Perl só resolve dois sub-problemas heurísticamente). As heurísticas permitem construir uma solução admissível que é em seguida sujeita a melhoramento. Os

resultados de Perl e Daskin foram bastante melhorados, quer em tempo de cálculo quer na qualidade da solução. Pequenos problemas foram alvo de uma resolução óptima e confirmaram os bons resultados heurísticos.

- Branco, I. M., Coelho, J. D., 1990, *The Hamiltonian p -Median Problem* [32].

Estudam um tipo particular de PLD sem capacidades em que todos os clientes são potenciais CA. Fazem uma apresentação de vários procedimentos heurísticos concluindo que um algoritmo de construção do tipo *clustering*, seguido de um procedimento de melhoramento de pesquisa local do tipo *3-optimal* se revela o mais eficaz. Resolvem problemas com 50 clientes obtendo 8 CA.

- Srivastava, R., Benton, W. C., 1990, *The Location-Routing Problem: Considerations in Physical Distribution System Design* [199].

Apresentam um trabalho em que testam a sensibilidade dos PLD a determinados factores, tais como, a estrutura de custos, a distribuição espacial dos clientes ou o número de potenciais localizações para os CA. A estrutura de custos, composta por custos de localização e de distribuição, é profundamente variável no seio do tecido económico e é previsível que tal variabilidade venha a influenciar os resultados dos PLD. Estudos efectuados mostram que a razão entre custos de localização e de distribuição pode variar entre 0.26 e 1.56. São testadas 3 estruturas de custos, baixa, média e alta. Clientes uniformemente distribuídos *versus* clientes em aglomerados é também um factor a que não é indiferente o resultado final. Baixos custos de localização e altos custos de distribuição podem beneficiar de um grande número de CA, caso seja possível instalá-los. Em contrapartida, será de instalar um reduzido número de CA quando o seu custo é superior ao da distribuição. Os problemas em teste, com 40 clientes, foram gerados aleatoriamente com uma distribuição uniforme, sendo as distâncias euclidianas. Algumas instâncias consideram os clientes espacialmente agrupados em determinadas áreas e nesses casos os clientes são aleatória e uniformemente distribuídos dentro de cada área. As encomendas também foram geradas aleatoriamente com uma distribuição uniforme. As capacidades dos veículos são fixas, podendo servir vários clientes. Os resultados são comparados a partir de valores de referência, obtidos a partir de uma abordagem sequencial clássica do tipo localização→distribuição. São testadas 3 heurísticas, *Saving-Drop*, *Savings Add* e *Cluster-Routing* [197]. Cada heurística corre 15 vezes em cada instância recolhendo-se a melhor solução. Os resultados não deixam margem para dúvidas; é um dos primeiros estudos em que os procedimentos heurísticos, que combinam localização e distribuição, se revelam claramente superiores, em média, 5,1% melhores que o procedimento sequencial. Entre os modelos heurísticos, o *Savings-Drop* e *Cluster-Route* são mais eficientes que a heurística *Savings-Add*, sendo a primeira menos sensível ao tipo de pro-

blema em estudo. Por exemplo, a estrutura de custos afecta bastante a heurística *Cluster-Routing*. Apresentam também uma formulação em programação linear inteira para o PLD.

- *Srivastava, R., 1993, Alternate Solution Procedures for the Location-Routing Problem [198].*

Expõe novamente os três procedimentos heurísticos, SAV1, SAV2 e CLUST, já descritos no artigo anterior [199], embora com outras designações. Explora o efeito de vários factores ambientais no desempenho do algoritmo. A primeira heurística, SAV1, assume que todos os CA estão abertos e usa custos de rota aproximados para determinar qual CA vai fechar. Estima o custo das rotas a partir de uma versão modificado do algoritmo *saving* para múltiplos CA [205]. O algoritmo itera entre as fases de rotas e de fecho de CA até que um desejado número de CA permaneça aberto. A segunda heurística, SAV2, toma o caminho contrário adicionando CA, um de cada vez. A terceira heurística identifica agrupamentos, gerando uma árvore de suporte mínima de clientes e posteriormente separando-os num número desejado de agrupamentos, usando uma técnica de pesquisa de densidade. Para avaliação das heurísticas usa a solução exacta, sempre que esta é viável, e soluções aproximadas obtidas pelo processo clássico sequencial [109][145][174][188]. Além de comparadas com os resultados de referência, as três heurísticas são também comparadas entre si. Mais uma vez se refere que os desvios relativamente à solução óptima andam à volta de 5%, sendo os procedimentos heurísticos substancialmente mais eficientes que o sequencial, especialmente quando o custo das rotas é superior ao dos CA. As heurísticas SAV1 e CLUST revelaram-se superiores à heurística SAV2. A primeira mais indicada para dados uniformemente distribuídos e a segunda para dados que revelam algum agrupamento.

- *Chien, T. W., 1993, Heuristic Procedures for Practical-Sized Uncapacited Location-Capacitated Routing Problems [43].*

Aborda problemas que, por admitirem restrições de capacidade nos veículos e não nos CA, designa por Problemas de Localização sem Capacidade - Distribuição com Capacidade. Os custos de localização e de distribuição são calibrados de forma a terem como base o mesmo horizonte temporal e os CA, embora sem restrições de capacidade, estão implicitamente limitados pela capacidade dos veículos neles instalados. Propõe uma resolução heurística sequencial. Com base nas características espaciais do problema gera dois estimadores do comprimento das rotas e serve-se deles para implementar a primeira fase de localização e afectação. De seguida traça as rotas a partir das localizações já definidas, obtendo uma solução admissível do PLD. Após a determinação das soluções admissíveis são aplicados

procedimentos de melhoramento nas rotas, nos clientes e nos CA com uma determinada sequência. Sempre que os estimadores de custo indicam uma melhoria, procede-se à alteração. Realiza testes computacionais em problemas com número de clientes entre 50 e 100, 3 a 5 potenciais CA e 3 a 5 veículos sediados em cada CA. Estima a solução óptima a partir das soluções encontradas, faz uma análise dos resultados e recomenda 3 heurísticas entre as 12 analisadas.

- Klose, A., 1995, *Using Clustering Methods in Problems of Combined Location and Routing* [118].

Fazem uso de métodos de agrupamento (*clustering*) para desenvolver uma heurística para PLD. Os custos de servir um determinado cliente a partir de um CA são estimados a partir de grupos pré-determinados de clientes. Usando estes custos, resolvem o problema de localização e de seguida o problema de rota de veículos para cada agrupamento e CA aberto. A iteração termina com uma tentativa de melhoramento da solução admissível do PLD, testando possíveis trocas de clientes entre rotas e um reestimar dos custos. O processo continua até que os custos, após a localização e a distribuição, se mantenham inalterados. Realizam testes computacionais em 48 problemas e apresentam resultados relativos a um problema com 200 clientes aos quais foi atribuída uma procura unitária e distância limite de 400 km por rota. O número de CA varia entre 2 e 7 (de acordo com a capacidade dos veículos) e o erro médio anda pelos 6,65% (relativamente à solução óptima do Problema de Localização Simples com os custos estimados com base nos agrupamentos). Testam também problemas de menor dimensão com 2 fábricas, 10 potenciais CA e 20 clientes uniformemente distribuídos. A capacidade das fábricas excede em 20% as encomendas e a dos CA é o dobro das encomendas. Foi estabelecido um custo por metro e por minuto, assim como uma capacidade máxima dos veículos e duração máxima das rotas com base numa solução de dois CA e 4 rotas. Os resultados foram comparados com testes idênticos considerando os custos como sendo o dobro da distância de cada cliente ao CA e revelaram pouca variação.

- Bruns, A., Klose, A., 1997, *A “Locate First – Route Second” Heuristic for a Combined Location-Routeing Problem* [34].

Artigo que tem como objecto de estudo um PLD com 3 níveis, custos fixos nos CA, restrições de fornecimento e procura e capacidade limitada dos CA e dos veículos. O método de resolução é heurístico, começando por resolver a parte de localização e depois alternando entre localização e rotas até que os resultados sejam consistentes. Os custos de servir os clientes são aproximados com recurso a um método de agrupamento. Este artigo não se afasta dos problemas, princípios e métodos usados no artigo anterior.

- *Salhi, S., Fraser, M., 1996, An Integrated Heuristic Approach for the Combined Location Vehicle Fleet Mix Problem [185].*

Sumariam o trabalho existente, classificando e tabelando as várias publicações. Prosseguem com um PLD complexo, na linha do estudo de Perl e Daskin [178], mas introduzindo novos conceitos, tais como: veículos com diferentes capacidades, custos fixos e variáveis nos veículos, aproximação explícita do comprimento das rotas, critério de paragem mais robusto e tratamento de problemas de maior dimensão por recurso a métodos heurísticos em todos os sub-problemas. O objectivo é determinar o número e localização dos CA, as rotas dos veículos e, pela primeira vez em simultâneo, a composição da frota. O procedimento iterativo alterna entre dois passos. O primeiro tem por fim a localização dos CA e afectação dos clientes e o segundo a resolução do problema de determinação das rotas e composição da frota. Após a primeira iteração, cada rota é colapsada num único cliente, com um custo estimado por um processo específico, sendo depois resolvido um problema clássico de localização. Uma ideia interessante, embora não inovadora, é começar por trabalhar somente com os clientes que declaradamente estão ligados a um CA, deixando de fora os *outsiders* que serão mais tarde integrados na solução do PLD. Realizaram testes computacionais em problemas com número de clientes entre 50 e 199, 1 a 5 CA e 1 a 3 tipos diferentes de veículos, considerando vários cenários. De acordo com os dados obtidos, concluem que a inclusão das rotas nas decisões de localização tem o efeito de posicionar a localização de forma a permitir alcançar uma boa solução final. Como já foi notado por outros autores, a melhor localização tendo em conta a Soma Instantânea, pode não conduzir às melhores rotas (solução do PLD).

- *Nagy, G., Salhi, S., 1996, Nested Heuristic Methods for the Location-Routing Problem [164].*

Introduzem um novo conceito de procedimento heurístico a que chamam método de encaixe (*nested*). Enquanto que o método sequencial percorre a localização e a distribuição e o método iterativo alterna entre os dois, o novo método encaixa a distribuição no procedimento de localização que, segundo os autores, é o pilar principal de qualquer PLD. Há claramente uma estratégia de hierarquização subordinando a distribuição à localização. Com base nesta nova filosofia resolvem um PLD com encomendas dos clientes, capacidade dos veículos assim como distância máxima de cada rota. Pretendem determinar o número e localização dos CA, a afectação dos clientes aos CA, o número de veículos em cada CA e as rotas de cada veículo que minimizam o custo total de distribuição, determinado com base nos custos dos CA e da distribuição. O algoritmo heurístico começa por encontrar uma SBA inicial, gerando um conjunto inicial de CA e resolvendo o problema de múltiplas rotas. De seguida, usam um procedimento de pesquisa

local do tipo *tabu search*, para obter melhoramento dessa solução. Consideram três tipos de movimentos na vizinhança de uma solução, *add*, *drop* e *shift*, calculando o seu custo e adoptando o que propicia um melhoramento maior. Após cada alteração num CA são testados dois procedimentos. No primeiro todos os percursos de distribuição são novamente determinados. No segundo, de forma a acelerar o processo, partem do princípio de que os CA mais afastados e respectivas rotas não sofrem alteração, aplicando um algoritmo de rotas de veículos somente ao CA em causa, aos CA vizinhos (segundo um esquema de tecelagem de Voroney) e aos respectivos clientes. Os testes computacionais tiveram por base um conjunto de 5 problemas com 400 clientes e cinco níveis de custos fixos nos CA para fornecer soluções entre 5 e 25 CA, o que perfaz um total de 25 problemas formados a partir dos problemas propostos por Christofides e Eilon [45]. Os resultados foram comparados com os fornecidos pela heurística sequencial e são entre 1 e 4% melhores; no entanto os tempos de cálculo são superiores.

- Nagy, G., Salhi, S., 1996, *A Nested Location-Routing Heuristic Using Route Length Estimation* [165].

Revisitam o mesmo tema da publicação anterior. O procedimento heurístico desta vez não usa um algoritmo de rotas de veículos quando investiga os movimentos possíveis em cada iteração. Em vez disso recorrem a um estimador do comprimento da rota especialmente concebido para o efeito. Uma vez consumada a alteração, recorrem a um algoritmo de rotas de veículos. Os testes computacionais revelam uma crescente melhoria nos resultados, relativamente à heurística do artigo anterior e cada vez mais afastados do método sequencial. Várias fórmulas de estimação do comprimento das rotas foram testadas; no entanto, não reflectem diferenças significativas entre si.

- Salhi, S., Nagy, G., 1999, *Consistency and Robustness in Location-Routing* [186].

Estudam a consistência e robustez na localização-distribuição. Este tema tinha já sido superficialmente abordado noutros artigos dos autores mas sem desenvolvimento. Está em causa a avaliação da consistência de vários métodos de resolução, incluindo a heurística do tipo *nested* apresentada em trabalhos anteriores e da robustez das soluções encontradas. Para isso, dividem o horizonte temporal em espaços de tempo iguais dentro dos quais as encomendas permanecem constantes. Foram testados dois problemas com 400 clientes com encomendas e três níveis de custos fixos nos CA. Obtêm soluções com 15, 20 e 25 CA. Ao todo estão em teste 15 problemas gerados a partir dos dados propostos por Christofides e Eilon [45]. Consideram 10 intervalos de tempo com diferentes encomendas gerados aleatoriamente a partir da distribuição *standard* e das encomendas. Tendo em conta que pequenas alterações nas encomendas não afectam significativamente os resultados

dos métodos apresentados, concluem pela sua robustez.

- *Min, H., 1996, Consolidation Terminal Location-Allocation and Consolidated Routing Problems [156].*

Propõe uma heurística para um PLD com 3 níveis com restrições de capacidade nos veículos e nos CA. O método heurístico desenvolve-se em três etapas: agregação dos clientes mais próximos em grupos que cumpram as restrições de capacidade (segundo o método de Ward [208]); localização dos CA com a afectação dos fornecedores e clientes ao CA mais próximo e configuração individual das rotas. Com o modelo apresentado resolvem um problema com 10 fornecedores, 8 possíveis CA e 93 clientes. O PLD estudado é apelidado de PLD com Consolidação de Terminal, devido ao facto de possuir mais de dois níveis e de considerar um grande número de fornecedores (praticamente ilimitado). Os problemas de consolidação tentam tirar partido de uma correcta mistura de transportes de maior e menor dimensão de forma a diminuir os custos.

- *Tuzun, D., Burke, L. I., 1999, A Two-Phase Tabu Search Approach to the Location Routing Problem [206].*

Aplicam uma heurística baseada numa filosofia do tipo tabu, para resolver um PLD formulado em programação linear binária, similar ao proposto por Perl e Daskin [178]. O método está dividido em duas fases, uma em que a pesquisa tabu é levada a efeito sobre as variáveis de localização e de seguida uma outra fase em que a pesquisa incide sobre as variáveis de distribuição (numa perspectiva local ou seja na vizinhança dos CA que sofreram alteração). O processo continua iterativamente até que não seja possível obter melhoria. O processo é iniciado com um único CA aberto, seleccionado aleatoriamente, ao qual são afectados todos os clientes. O algoritmo *saving* [47] é aplicado para determinar a/s rota/s de distribuição, seguido de um processo de melhoramento do tipo *2-optimal* [142]. Realizam testes computacionais em problemas com 100, 150 e 200 clientes, 10 e 20 potenciais CA e com diversa distribuição espacial de clientes. Comparam os seus resultados com os de Srivastava [198] e também com uma heurística sequencial clássica. Os resultados obtidos revelam uma melhoria de cerca de 2,6%, mas o tempo de resolução sofre um acréscimo que se vai diluindo à medida que a dimensão do problema aumenta.

- *Wu, T., Low, C., Bai, J., 2002. Heuristic Solutions to Multi-Depot Location-Routing Problems [214].*

Após concluírem que os PLD abordados até então são irrealistas, por considerarem um número ilimitado de veículos e/ou uma frota homogénea, propõem um PLD com múltiplos CA e número limitado de veículos em cada CA com capacidades variadas. Apresentam uma formulação em PL mista semelhante à proposta

por Perl e Daskin e propõem uma resolução heurística tradicional iterativa do tipo localização \Rightarrow distribuição. Na primeira iteração o PLA é resolvido com base na soma instantânea, nas restantes é desenvolvida uma nova matriz de distâncias. Segundo os autores o processo de Perl e Daskin, ao fixar o primeiro e último cliente da rota, inibe que sejam testadas outras possibilidades de início e fim de rota. A resolução heurística recorre a procedimentos de pesquisa local do tipo *simulated annealing*. Realizam testes computacionais com base em três problemas com 12, 55 e 85 clientes, já usados por Perl e Daskin. Os resultados são comparados, embora existam algumas diferenças nos problemas. Também efectuam testes sobre vários problemas gerados para o efeito com 50, 75, 100 e 150 clientes com potenciais CA que variam entre $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{20}$ dos clientes. É efectuada uma comparação entre este procedimento e o algoritmo encaixado de Nagy e Salhi [164], concluindo pela sua semelhança.

C.3. ESTUDOS MULTI-CRITÉRIO

Dedicados a PLD que apresentam uma função objectivo múltipla.

- Murty, K. G., Djang, P. A., 1999, *The U.S. Army National Guard's Mobile Training Simulators Location and Routing Problem* [162].

Problema concreto ligado à área militar. Está em causa a instalação de 21 bases principais para simuladores de treino entre 29 locais possíveis, a identificação de locais secundários para onde se deslocarão os simuladores móveis, de tal forma que se encontrem a uma distância máxima dos utilizadores, o traçado das rotas dos simuladores a partir das bases principais por estas bases secundárias, tendo em conta que um simulador pode visitar mais do que uma vez uma base secundária, a afectação de cada unidade da Guarda Nacional de forma directa a um local de simulação e o estabelecimento de uma escala de treinos ao longo do ano para que cada unidade receba os treinos mínimos exigidos, tendo em conta as capacidades dos simuladores. Os objectivos são a minimização da distância anual percorrida pelos simuladores, da distância anual percorrida pelas unidades da Guarda Nacional e do número de centros de treino secundários. Trata-se de um PLD multi-objectivo envolvendo várias decisões combinatórias que, pela primeira vez, assume variáveis de localização em dois níveis distintos. Através de uma abordagem heurística de decomposição hierárquica, o problema foi subdividido em vários problemas menores (tratáveis), permitindo obter uma solução que inclui menos simuladores e uma distância percorrida 70% menor relativamente ao plano original, em suma, uma enorme poupança de vários milhões de dólares.

- Johnson, M. P., Gorr, W. L., Roehrig, S. F., Heinz, J. H., 2000, *Location/Allocation/Routing for Home-Delivered Meals Provision: Models and Solution Approaches* [113].

Artigo sobre um caso prático de produção e distribuição de alimentos por pessoas idosas e inválidas. Trata-se de um trabalho voluntário realizado numa região suburbana de Pittsburgh, mais propriamente em Allegheny County. Pretende-se com este estudo determinar em simultâneo a localização das cozinhas (CA) e as rotas de distribuição da comida pelos carenciados, usando múltiplos veículos. Trata-se de um PLD multi-objectivo com limite de distância das rotas. Para o resolver usam um método heurístico interactivo baseado num procedimento de localização-afecção primeiro, distribuição depois. O procedimento tem em conta a impossibilidade de incorporar custos fixos dos serviços, a necessidade de permitir aos utilizadores a consideração de princípios de equidade, consideração explícita da procura não satisfeita e *tradeoffs* entre eficiência, equidade e eficácia. Apresentam uma formulação em programação linear binária com três índices, ao jeito de Perl e Daskin [178] e Laporte [127]. A resolução heurística é baseada numa divisão espacial em áreas de influência das cozinhas, de forma a que possam servir os "clientes" dentro dos limites de tempo (distância). Concluem que um novo desenho da localização permitiria uma maior abrangência do sistema de cozinhas e aumentaria a eficiência da distribuição.

D. PLD COM CAMINHOS

D.1. ESTUDOS MULTI-CRITÉRIO

Os PLD em estudo apresentam uma função objectivo múltipla. Em geral incidem sobre localização e transporte de resíduos desagradáveis e/ou perigosos.

- Zografos, K. G., Samara, S., 1989, *Combined Location-Routing Model for Hazardous Waste Transportation and Disposal* [215].

Estudam um PLD relacionado com a localização de depósitos de lixo e respectivas rotas de recolha. Assumem ser este o primeiro estudo, relacionado com o tratamento de lixo, em que a localização dos aterros e os percursos dos carros de recolha são considerados em simultâneo. Propõem um modelo multi-critério em que se pretende minimizar o risco de localização do CA, o risco do transporte e o tempo de viagem. Usam um método de programação por metas para resolver um problema hipotético que inclui 3 locais de produção de lixo, 4 potenciais localizações de aterros e 9 centros populacionais.

- ReVelle, C., Cohon, J., Shobrys, D., 1991, *Simultaneous Siting and Routing in the Disposal of Hazardous Wastes* [182].

Trata-se de um estudo sobre a localização de centros de recolha de resíduos nucleares, afectação dos centros às centrais e traçado dos caminhos entre as centrais e os centros que minimizem o risco para a população e a carga transportada. É

um problema multi-objectivo resolvido com recurso a uma mistura de métodos de determinação do caminho mais curto, de localização e de programação multi-objectivo. O trabalho foi realizado para o Departamento de Energias dos Estados Unidos e teve por base um problema real que inclui 14 centrais nucleares e 24 potenciais centros situados na zona leste dos Estados Unidos.

- *List, G. F., Mirchandani, P., 1991, An Integrated Network/Planar Multiobjective Model for Routing and Siting for Hazardous Materials and Wastes [143].*

Artigo dedicado ao transporte e armazenagem (tratamento) de lixos e materiais perigosos no distrito de Albania. Consideram o risco, o custo e a equidade de risco entre as diversas zonas numa perspectiva multi-objectivo. Constroem um modelo para o problema e efectuem testes com base em dados reais recolhidos no Capital District (Albany). A rede possui 124 arcos, 86 nodos e 15 produtores de lixos que geram entre 10 a 120 *truckloads* por ano. Existem 4 potenciais CA com uma capacidade de 500 *truckloads* por ano, o que significa que pelo menos 3 dos CA têm de ser abertos. Consideram lixo de um só tipo, um único grau de perigosidade, estações de tratamento do mesmo tipo e reduzem as zonas de impacto a um ponto.

- *List, G. F., Mirchandani, P. B., Turnquist, M. A., Zografos, K. G., 1991, Modeling and Analysis for Hazardous Materials Transportation: Risk Analysis, Routing/Scheduling and Facility Location [144].*

Fazem um *state-of-the-art* no que se refere à investigação sobre o transporte de materiais perigosos. Incluem uma secção dedicada a PLD, na qual é revisto o trabalho desenvolvido ao longo da década de anterior [194][215]. Apresentam ainda uma classificação de modelos combinados de localização-distribuição.

- *Boffey, B., Karkazis, J., 1993, Models and Methods for Location and Routing Decisions Relating to Hazardous Materials [29].*

Este artigo faz um ponto da situação e organiza a investigação anterior. Separa com habilidade os *hazardous problems* dos *ordinary problems*, realçando a sua natureza assimétrica e multi-objectivo (bi-critério) e caracterizando-os como uma consequência da acção humana. Analisam em separado a localização e a distribuição, para depois combinarem os dois objectivos. Em cada um dos capítulos indicam as principais referências sobre o assunto em discussão. Trata-se de um artigo claro e essencial para assentar ideias sobre a localização e distribuição de materiais perigosos.

- *Stowers, C. L., Palekar, U. S., 1993, [201].*
- *Coutinho-Rodrigues, J., Clímaco, J., Current, J., Ratick, S., 1997, An Interactive*

Spatial Decision System for Multiobjective HAZMAT Location-Routing Problems [50].

É um artigo sobre um PLD relacionado com o transporte de materiais perigosos. Apresentam uma formulação multi-objectivo em programação linear mista e resolvem-no com recurso a um procedimento do tipo *branch-and-bound*, após colapsar a função objectivo de forma ponderada, isto é, como combinação linear convexa dos 5 objectivos iniciais. Todo o processo é integrado numa aplicação computacional que permite uma utilização interactiva fácil e atraente, com visualização permanente da rede, das diversas soluções propostas e que permite testar uma grande variedade de opções. É uma excelente proposta para auxílio dos decisores ou mesmo para o público em geral, que consegue tornar simples e funcional um problema que reconhecidamente é complicado. Resta acrescentar que neste PLD não estão em causa rotas mas sim caminhos entre a fonte e os centros de tratamento.

- *Giannikos, I., 1998, A Multiobjective Programming Model for Locating Treatment Sites and Routing Hazardous Wastes [90].*

Estuda a localização e transporte de resíduos perigosos. Trata-se de um problema composto por 4 objectivos: minimização do custo total de operação, minimização do risco total pressentido, distribuição equilibrada do risco entre os centros populacionais e distribuição equilibrada dos incómodos causados pela operação de tratamento. O problema foi formulado e resolvido com recurso à programação por metas (*Goal Programming*). A formulação em programação linear binária admite uma função objectivo ponderada e normalizada. O problema foi testado com um exemplo hipotético composto por 13 centros populacionais dos quais três geram lixos perigosos e cinco possíveis localizações para as estações de tratamento cuja dimensão pode assumir três alternativas. A sensibilidade do problema face à variação das penalidades esteve em avaliação. Assumindo a dificuldade em imaginar com realismo um problema desta natureza, o autor não aponta uma solução mas apenas possíveis vias de investigação.

- *Cappanera, P., Gallo, G., Maffioli, F., 2004, Discrete Facility Location and Routing of Obnoxious Activities [36].*

Artigo sobre a localização de serviços desagradáveis e determinação dos caminhos associadas ao transporte entre a produção e os serviços. Formulam o problema em programação linear mista tendo como objectivo a minimização do incómodo (*nuisance*) em contraste com a habitual minimização do risco. Sendo o problema NP-completo, propõem uma abordagem heurística para determinar limites inferiores e superiores. Através de um processo de relaxação lagrangeana encontram limites inferiores, subdividindo o problema inicial em dois sub-problemas, um de

localização e outro de distribuição. Com base no método usado para obter limites inferiores constroem duas heurísticas para determinação de limites superiores. Trata-se de aproveitar a solução de um dos sub-problemas, localização ou distribuição, e impô-la ao outro problema que, a ser admissível, é também uma solução admissível do problema original e um limite superior. Com este processo obtêm *gap's* à volta de 25%. O processo foi ainda melhorado com recurso a um método de *branch-and-bound*, do qual foram testadas várias versões.

D.2. PLD COM CAMINHOS (GERAIS)

Restantes PLD com caminhos não enquadrados na categoria anterior.

- Maranzana, F. E., 1963, *On the Location of Supply Points to Minimize Transportation Costs* [147].

É provavelmente o primeiro artigo a aflorar os PLD ao considerar percursos de transporte entre o cliente e o CA não necessariamente directos e distâncias ponderadas pelo volume transportado. No entanto não está subjacente ainda a noção de rota, mas sim a ligação do cliente ao CA, eventualmente por um caminho que integre outros clientes. A resolução é heurística e iterativa do tipo localização↔afecção. A localização baseia-se na determinação dos centros de gravidade entre os nodos existentes e a distribuição na determinação dos caminhos mais curtos entre os clientes e os CA, usando o algoritmo de Bellman [19]. Foi testado um problema real relacionado com 40 cidades italianas (clientes) e três CA.

- Maranzana, F. E., 1964, *On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs* [148].

Artigo similar ao anterior [147].

- Derks, J. J. M., Spijksman, F.C. R., 1996, *A Decision Support System for Locating Facilities and Routing Traffic on a Factory Site* [60].

Trata-se de um estudo sobre um PLD relacionado com uma empresa de cimento holandesa. Pretende-se determinar a localização de determinados serviços no interior da empresa e as rotas de fluxo através da empresa, minimizando o congestionamento das mesmas. Tal como em outras aplicações (transporte de lixos tóxicos) também aqui as rotas são constituídas por caminhos entre dois pontos. O método de resolução admite alguma interactividade de forma a introduzir alterações e fornece soluções em segundos. A rede considerada é orientada, com restrição de capacidade nos vértices e nos arcos e vários caminhos que têm de passar obrigatoriamente por determinados vértices. Os restantes, entre a partida e a chegada, são os que minimizam a função objectivo. A escolha dos caminhos

é baseada num processo heurístico de pesquisa local que termina quando não é possível obter melhoramento num determinado caminho. A *interface* com o utilizador é baseada na rede que representa a própria fábrica e permite efectuar alterações em todos os parâmetros. A rede contém 28 vértices onde estão representados 16 serviços, pontos de entrada e saída e também cruzamentos. São consideradas 13 rotas de fluxo sendo a planificação diária feita hora a hora.

- Lee, Y., Kim, S., Lee, S., Kang, K., 2003, *A Location-Routing Problem in Designing Optical Internet Access with WDM Systems* [139].

A evolução para redes de acesso em fibra óptica, o fornecimento de serviços de acesso de banda larga e a diminuição do custo das redes são desafios abordados neste artigo. A *Internet* de alta velocidade e a evolução dos equipamentos da rede conduz à necessidade de uma reestruturação das próprias redes. Os autores consideram uma rede constituída por nodos *Gateway*, nodos *Remoto* e ligações entre ambos. Pretendem determinar a localização óptima dos nodos *Gateway*, a afectação dos nodos *Remoto* aos nodos *Gateway* e a capacidade de tráfego. Considerando um conjunto de caminhos entre cada nodo *Remoto* e *Gateway* apresentam uma formulação em termos de caminhos. Uma formulação em termos de fluxo (mais praticável) é também proposta. Recorrendo a um algoritmo heurístico do tipo *Tabu-Search* obtêm percentagens de *gap* inferiores a 5%.

3.2 Outras Publicações

Uma revisão bibliográfica não ficaria completa sem uma referência a outro tipo publicações para além dos artigos. A pesquisa efectuada não permitiu encontrar qualquer livro expressamente dedicado ao estudo de PLD. Existem sim, várias teses de doutoramento sobre o tema que se referem em seguida. Cada um destes trabalhos foi acompanhado da publicação de artigos já apresentados e anotados que resumem os estudos efectuados. São apresentadas 9 teses de doutoramento por ordem cronológica.

- Or, Ilhan, 1976. *Traveling Salesman-Type Combinatorial Problems and Their Relation to the Logistics of Regional Blood Banking* [173].
- Shobrys, Donald E., 1981. *A Model for the Selection of Shipping Routes and Storage Locations for a Hazardous Substance* [194]
- Pearl, Jossef, 1983. *A Unified Warehouse Location-Routing Analysis* [176].
- Srivastava, Rajesh, 1986. *Algorithms for Solving the Location-Routing Problem* [197].
- Salhi, S., 1987. *The Integration of Routing into the Location-Allocation and Vehicle Fleet Composition Problems* [184].

- Nambiar, Jayamohan, 1988. *Location and Vehicle Routing in the Malaysian Rubber Industry* [167].
- Nagy, Gabor, 1996. *Nested Heuristic Approaches for the Combined Location Routing Problem* [163].
- Berger, Rosemary Tonya, 1997. *Location-Routing Models for Distribution System Design* [21].
- Ferreira, Carlos Manuel dos Santos, 1997. *Problemas de Localização e Distribuição Multicritério - Aproximações e Estudo de Alguns Casos Com Implicações Ambientais* [75].

3.3 Síntese

Neste capítulo foi apresentada uma revisão bibliográfica anotada na área da Localização-Distribuição, complementada no apêndice C por algumas considerações estatísticas que realçam as principais linhas de investigação, as revistas de publicação e os autores envolvidos. Trata-se de um trabalho exaustivo, com preocupações de documentação histórica, que pretende colmatar uma deficiente informação sobre a investigação existente neste domínio. Um dos aspectos essenciais deste capítulo prende-se com o agrupamento organizacional dos textos em PLD (figura 3.1). Nesta proposta destacam-se claramente algumas tendências de investigação. No primeiro nível da árvore de classificação surge uma classe de artigos designados por PLD com caminhos que, pela natureza do conteúdo da investigação neles efectuada, apresenta já suficientemente especificidade e autonomia para se assumir como sub-área dentro da Localização-Distribuição. Outras vias de investigação como sejam a LD estocástica ou a LD dinâmica podem vir a ganhar espaço próprio mas, por enquanto, ainda se encontram no início do seu desenvolvimento.

Capítulo 4

Complexidade e uma Taxonomia para o PLD

4.1 Uma Taxonomia para o PLD

4.1.1 Introdução

Após algumas décadas de estudos e publicações sobre Problemas de Localização-Distribuição persiste ainda alguma indefinição quanto à sua classificação. Por vezes, revela-se algo difícil o exercício de identificar com rigor o tipo de problema/s estudado/s por cada autor. Os PLD têm vindo a ocupar um lugar próprio, libertando-se de um conceito original que os considerava como sendo apenas o somatório de Problemas de Localização com Problemas de Rotas de Veículos. Para esta maturidade, alcançada com dificuldade e persistência, contribuíram muitos autores, destacando-se os trabalhos de Webb [210] e Salhi e Rand [188] que demonstraram, definitivamente, as vantagens de uma visão integrada deste problema. Agora que os PLD conquistaram a sua posição, é necessário acompanhar o seu desenvolvimento com um esforço de ordenação e classificação. Sendo assim, está encontrado o propósito e a motivação para este capítulo.

Como já se expôs nos capítulos anteriores, os PLD caracterizam-se pela determinação, em simultâneo, da localização de CA e dos percursos de ligação entre estes e os clientes. Se os percursos forem directos, isto é CA-cliente-CA, caímos no caso particular dos Problemas de Localização-Afectação (PLA), [3] [120]. Se, por outro lado, a localização dos CA é fixa, o PLD transforma-se num clássico Problema de Rotas de Veículos (PRV) [27] [129].

A maior parte das publicações, sejam de carácter teórico ou de aplicação a problemas reais, introduz novas características nos PLD, apresentando o "seu" problema, ao qual atribuem designação própria. Sendo um problema que interliga a localização e a distribuição, a possibilidade de combinação das características individuais conduz a

uma grande diversidade de sub-problemas que importa separar, ordenar e classificar. Neste sentido, trabalhos como o de Balakrishnan et al. [8], Laporte [127], List et al. [144], Min et al. [158] e Johnson et al. [113] desempenharam já uma importante tarefa de classificação, com especial destaque para o trabalho oportuno e intencional de Min et al. incontornável pela profundidade e importância que dedica à taxonomia dos PLD.

A concepção de uma taxonomia pode ser estritamente teórica e formal ou então partir de um conhecimento mais prático e real. No primeiro caso, a concepção formal e matemática do problema dá lugar a um conjunto de características que permitem a sua identificação e classificação. Desta forma, a taxonomia precede o problema, formando um esquema teórico genérico no qual serão encaixados os diversos tipos de problemas existentes. Apesar de ser possível, pelo menos em teoria, caracterizar um PLD exclusivamente pela sua formulação matemática, que não é mais do que a tradução simbólica da natureza dos dados, restrições e objectivos, uma classificação deste tipo esbarra com algumas questões difíceis de contornar. Desde logo é perceptível a grande dificuldade em extrair características próprias de uma quantidade de símbolos matemáticos, dificuldade agravada ainda pela existência de várias formulações para o mesmo problema.

De forma distinta, a taxonomia pode ser construída reflectindo a realidade existente, quer seja a realidade dos problemas do dia a dia ou a dos problemas mais teóricos. Este capítulo segue este percurso, construindo uma taxonomia fundamentada pelo saber actual e suportada pelas experiências de investigação relatadas pelos autores. Indo ao encontro destes estudos, assume um papel de organizador do conhecimento existente e publicado.

4.1.2 Metodologia

É importante salientar que, neste trabalho de taxonomia, são apenas contemplados PLD com representação no plano. Desta forma, cada cliente ou CA pode ser identificado pelas suas coordenadas num referencial cartesiano bidimensional.

Desde o momento da sua concepção até ao da aceitação e implementação dos resultados, os PLD seguem um percurso normal de desenvolvimento, no qual são ultrapassadas várias etapas. A figura 4.1 destaca as principais: obtenção dos dados, formulação matemática, resolução e interpretação de resultados. Sendo etapas comuns à concepção de qualquer PLD não podem, por isso, servir de factor de distinção entre eles. O que é necessário é perceber como é que, percorrendo o mesmo trajecto, se chega a diferentes problemas. Existirá um ou vários ingredientes que, acrescentado/s em determinado momento a estas etapas, conduz a um PLD específico.

Obtido um conjunto de dados relacionados com um PLD, não é possível concretizar a sua formulação matemática sem recorrer ao que aqui designamos por *características intrínsecas* do problema, isto é, a sua natureza, as restrições impostas e os objectivos a alcançar. São estas características que permitem a transformação de um conjunto

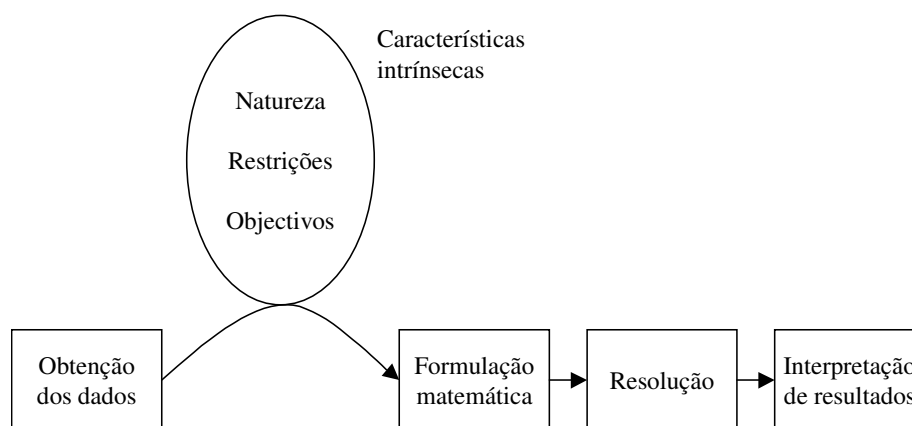


Figura 4.1: Processo de desenvolvimento de um PLD.

de dados ou elementos sem "vida" própria, numa estrutura matemática que representa por si só um determinado PLD (figura 4.1).

Obviamente, o exemplo anterior serve apenas para suportar e salientar a noção de características intrínsecas. Um PLD pode existir apenas na nossa mente ou apenas numa definição textual e descritiva e nem por isso deixa de ser um PLD. O que é certo é que qualquer que seja a forma como se manifesta a existência de um PLD, na sua estrutura básica tem de incluir a percepção da sua natureza, dos seus objectivos e das restrições que condicionam a obtenção dos objectivos. Estas características nada têm a ver com a metodologia de tratamento do PLD, estão sempre presentes e dependem unicamente do PLD em estudo. É com base nelas que se procede à classificação dos PLD.

Os condicionalismos que antecedem o momento em que se recorre às características intrínsecas do problema, tais como a fonte geradora dos dados ou a forma de os obter (teóricos, reais, aleatórios, empíricos) e as questões subsequentes, tais como a formulação matemática (linear, não linear, inteira, binária, mista), a resolução com recurso aos mais variados processos (exactos, heurísticos) e a interpretação de resultados não podem nem devem servir de suporte à caracterização de um PLD. Quanto muito, este tipo de informação completa o enquadramento e a percepção do problema estudado, mas não fundamenta a sua classificação.

4.1.3 Classificação Principal dos PLD

Quanto à Sua Natureza

Face à definição 2 (p. 35) é possível, desde logo, separar alguns tipos de problemas, de acordo com o tipo de localização ou o tipo de rota.

Se é aceitável a localização de um CA em qualquer ponto, o problema diz-se **PLD contínuo** ou **no plano**. Caso seja definido à partida um conjunto de potenciais

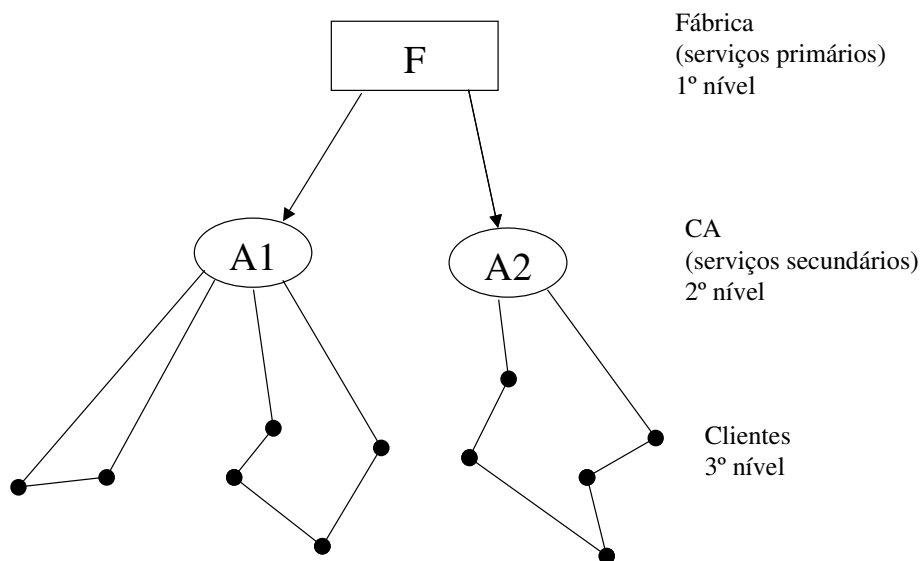


Figura 4.2: Sistema de localização-distribuição com 3 níveis.

localizações para os CA, então o problema diz-se um **PLD discreto**. Se o sistema de localização-distribuição pode ser representado por um grafo¹ então o problema designa-se por **PLD em rede**.

A definição 1 (p. 28), mais estrita, considera apenas PLD com duas estruturas fixas ou a fixar, os CA e os clientes, designado-se por **PLD com dois níveis**. Se, além da distribuição entre os CA e os clientes, estiver em causa, por exemplo, a distribuição entre as fábricas e os CA o **PLD diz-se com três níveis** e assim sucessivamente teremos os **PLD multi-nível**. Um PLD com um nível considera que os CA podem ser localizados entre os próprios clientes. A figura 4.2 mostra um sistema de distribuição de mercado com 3 níveis, identificados a partir das diferentes estruturas físicas localizadas ou a localizar (fábricas, CA, clientes). Também é possível diferenciar os níveis consoante os vários tipos de rota [8]. Neste caso, o problema ilustrado na figura 4.2 teria dois níveis, tendo em conta os dois tipos de rotas distintas que apresenta, entre as fábricas e os CA e entre os CA e os clientes. A diversidade de rotas possíveis, a possibilidade de construção de rotas entre níveis não consecutivos ou mesmo a existência de rotas que integram vários níveis, torna algo complicada a identificação do número de níveis com base nas rotas, justificando a opção pela sua contabilização a partir dos elementos físicos de localização.

Entre o 1º e o 2º nível, o transporte é efectuado em veículos de grande porte que, habitualmente, efectuam uma única viagem de ida e volta. A distribuição entre o 2º e o 3º nível é, normalmente, efectuada em veículos mais pequenos, cujo tipo de

¹No caso de um sistema com 2 níveis o grafo indica os potenciais CA, clientes e possíveis ligações entre eles.

percurso deve também servir de caracterização aos PLD. Seguem-se alguns exemplos de percursos de distribuição:

1. rotas que partem dos CA, visitam os clientes e regressam ao mesmo CA;
2. rotas que partem dos CA, visitam um só cliente (não directamente) e regressam ao mesmo CA;
3. caminhos que partem dos CA, visitam os clientes mas não regressam aos CA;
4. caminhos que partem de um CA mas podem regressar a um outro CA;
5. caminhos entre um cliente e o CA ou *vice-versa*.

Um PLD em que os percursos de distribuição são do tipo 1 ou 2, são designados **PLD com rotas** enquanto que os que incluem percursos do tipo 3, 4 ou 5 são **PLD com caminhos**.

Os PLD devem o seu desenvolvimento às motivações e solicitações que foram surgindo nas mais variadas áreas, desde as ligadas ao comércio e indústria, às ecológicas ou sociais. Muitas das características aqui descritas são a resposta aos enquadramentos e condicionalismos que as aplicações reais colocaram. Neste sentido, os percursos de distribuição referidos anteriormente serão, à partida, percorridos por veículos que, por sua vez, são conduzidos por pessoas. Ambos, veículos e pessoas, têm limitações próprias; contudo, de forma a tornar os PLD tratáveis, não é habitual separar as limitações do veículo das inerentes à pessoa que o conduz, pelo menos nos artigos até agora publicados. Embora a definição 2 não faça referência aos veículos, podemos considerá-los desde que existam em número ilimitado em cada CA e possam visitar um número ilimitado de clientes.

Muitas vezes os dados referentes a um problema não são determinísticos ou então, não sendo conhecidos com rigor *a priori*. Nestes casos recorre-se a processos probabilísticos que permitam obter estimativas. Por exemplo, é vulgar efectuar estudos de localização-distribuição com base em previsões de procura e/ou oferta. Sendo assim, relativamente à natureza dos dados, os PLD são divididos em **PLD determinísticos** ou **PLD estocásticos**.

A própria natureza dos PLD, que interligam decisões estratégicas de longo prazo como as de localização, com decisões táticas de curto prazo como as de distribuição, conduz à separação dos PLD em duas classes de problemas. Aqueles que, de alguma forma, encaram ambas as decisões como reportadas ao mesmo espaço temporal, por vezes recorrendo à ponderação de cada tipo de decisão, designados por **PLD estáticos** e os que consideram vários períodos de tempo, com alteração das condições e dos dados do problema de um período para outro, chamados **PLD dinâmicos** [130].

Em alguns problemas relacionados com a distribuição de correio, recolha de lixo, limpeza de ruas, leitura de contadores ou distribuição de publicidade em áreas citadinas,

as ruas de passagem são consideradas como se de clientes se tratassem. Este tipo de problemas, em que os clientes não são os nodos do sistema mas sim os seus arcos, é também alvo de designação especial, são conhecidos por **PLD orientados para arcos** [141].

Também têm sido estudados PLD em que existe uma oferta e uma procura associada a cada cliente. Em cada ponto de paragem o veículo efectua descargas e recolhas. Este tipo de problemas é chamado de **PLD de muitos-para-muitos** [166].

Quanto às Suas Restrições

Na prática, a existência de encomendas por parte dos clientes condiciona todo o problema, uma vez que os CA e os veículos devem ter a capacidade mínima para as satisfazer, sob pena de obtermos um problema sem solução admissível. Ao acrescentar este novo conjunto de características, relacionadas com as encomendas dos clientes e com a capacidade dos veículos e CA, obtemos uma nova classe de PLD designados por **PLD com capacidade**. Em alguns problemas a existência de encomendas por parte dos clientes não é sinónimo de um PLD com capacidade, uma vez que estas apenas servem como meio de ponderação do custo do percurso, continuando a não existir restrições de capacidade nos veículos ou CA.

Embora o número de veículos possa ser limitado à partida, este texto opta por deixar em aberto essa opção. Na maior parte dos problemas o custo fixo e variável dos veículos, a sua capacidade limitada ou, simplesmente, a propriedade da desigualdade triangular (se for verificada), encarregam-se de limitar o número de veículos. Também não se impõe um limite à distância percorrida pelo veículo em cada rota, admitindo que esta será condicionada pela sua capacidade limitada, encomendas dos clientes e pela função objectivo que, na maior parte dos casos, minimiza a distância ou um custo directamente relacionado com a distância.

O mesmo argumento justifica a não explicitação *à priori* do número de CA ou do seu limite. O compromisso entre o custo dos CA, a sua capacidade e a satisfação das encomendas dos clientes conduzirá, implicitamente, a um número de CA necessário à admissibilidade do problema. Se o PLD não definir a capacidades dos CA ou o seu custos de instalação, então é desejável delimitar o seu número, caso contrário poderão surgir surpresas decorrentes da abertura de um número de CA pouco razoável.

Alguns PLD consideram ainda que o serviço aos clientes deve ser escalonado no tempo. Este tipo de restrições temporais conduz aos chamados **PLD com janelas de tempo**. São restrições que podem surgir sobre várias formas de acordo com a amplitude da janela de tempo. Se for de amplitude nula, o serviço é realizado num determinado instante. Se for positiva, existe um espaço de tempo para realização do serviço. A não existência de janela de tempo é equivalente à sua consideração com uma amplitude infinita.

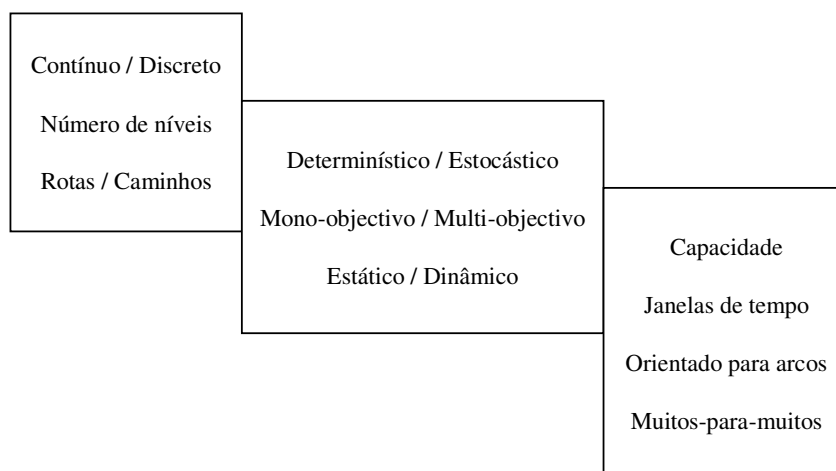


Figura 4.3: Características principais de um PLD.

Quanto aos Seus Objectivos

A generalidade dos PLD tem como objectivo a minimização dos custos imputados à localização do CA e aos percursos de distribuição. Estes custos são, frequentemente, ponderados para equilibrar o seu peso no sistema geral e permitir um objectivo único. No entanto, alguns tipos de PLD, especialmente os que estão relacionados com a localização de estações de tratamento de resíduos perigosos ou desagradáveis e o respectivo transporte, assumem vários tipos de objectivos não integráveis e por vezes conflituosos que requerem uma abordagem multi-objectivo. Nestes casos é necessário encontrar uma solução de compromisso entre os vários objectivos em jogo [75]. Estas características, que não dependem da estratégia de resolução mas sim do próprio problema, são identificadas com a designação **PLD mono-objectivo** ou **PLD multi-objectivo**.

A figura 4.3 resume as características principais dos PLD, agrupando-as segundo um esquema que lhes confere alguma hierarquia.

Outras Características Principais

Na literatura podem ser encontrados PLD com algumas características próprias, nomeadamente clientes que podem ser visitados mais do que uma vez [135], percursos de distribuição que incluem vários níveis [162], rotas interligadas [138] e recolha em vez de distribuição [215]. Outros são definidos sobre pressupostos especiais, como por exemplo formulados sobre uma *path network* [6], em que se pretende minimizar o tempo de espera dos clientes. Existem ainda PLD com distribuição de múltiplos produtos [30] e veículos de diferentes dimensões [214]. Todas estas características são apresentadas com um carácter muito próprio e esporádico e não constituem por si só uma base sólida sobre a qual se desenvolvam classes de PLD. Como tal, devem acompanhar a definição dos problemas, mas não ocupar, para já, espaço próprio nesta classificação.

Tabela 4.1: Características explícitas e implícitas dos PLD.

Características de um PLD		Diversos tipos de PLD						
		A	B	C	D	E	F	G
Devem acompanhar a definição	Contínuo/Discreto							
	Número de níveis							
	Rotas/Caminhos							
Assumidas quando ausentes	Determinístico/Estocástico	Det.	Est.	Est.	Est.	Est.	Est.	Est.
	Mono/Multi objectivo	Mon.	Mon.	Mul.	Mul.	Mul.	Mul.	Mul.
	Estático/Dinâmico	Est.	Est.	Est.	Din.	Din.	Din.	Din.
Não consideradas quando ausentes	Capacidade							
	Janelas de tempo							
	Orientados para arcos							
	Muitos-para-muitos							

As características apresentadas para determinados problemas não são todas indispensáveis à definição do problema. Algumas são básicas e devem acompanhar todos os PLD, a saber: a informação sobre se o problema é contínuo ou discreto, o número de níveis e o tipo de rota ou caminho. Outras, são aceites por omissão, por exemplo, quando nada é dito em contrário, um PLD considera-se sempre determinístico, mono-objectivo e estático. Se o problema é estocástico, multi-objectivo ou dinâmico, essa característica deve ser expressa com a designação do problema. Um outro grupo de características como sejam a existência de janelas de tempo, a capacidade limitada, a orientação para arcos ou de muitos-para-muitos, acompanham a caracterização do problema só no caso de se verificarem, caso contrário considera-se a sua inexistência.

A tabela 4.1 ilustra vários tipos de PLD (A,...,G). Em cada coluna, as células escuras indicam que a respectiva característica está explícita na definição do problema; células em branco com texto sobreposto indicam as características implícitas do problema, caso não sejam referidas. Finalmente, as células em branco indicam características ausentes. Por exemplo, um PLD do tipo A, por definição, terá as seguintes características: contínuo ou discreto, n níveis e rotas ou caminhos. Implicitamente assume também as seguintes características: determinístico, mono-objectivo e estático. Não possui características como capacidade limitada, janelas de tempo, orientação para arcos ou de muitos-para-muitos.

4.1.4 Características Complementares

Uma grande parte dos PLD não fica convenientemente definido recorrendo somente às classificações aqui designadas por principais. Em geral são problemas complexos que exigem uma explicitação precisa do sistema que os envolve. Tomando por base um PLD com dois níveis, existe um conjunto de informação adicional que pode e deve acompanhar a sua caracterização, extrapolando para os restantes níveis os mesmos princípios.

Tabela 4.2: Características complementares de um PLD.

PLD – FICHA TÉCNICA			
Centros de Acção	Número fixo (F) ou limite máximo(L)		
	Capacidade	Igual para todos	
		Distinta	
	Custo fixo e/ou variável		
Clientes	Encomendas (E) e/ou fornecimentos (F)		
	Localizados nos nodos ou nos arcos		
	Horário para serviço	Fixo e pré-estabelecido	
		Janela de tempo	
Veículos (Percursos)	Número de veículos por depósito variável		
	Capacidade	Igual para todos	
		Distinta	
	Custo fixo e/ou variável		
	Tipo de percurso permitido		
	Distância máxima		
	Tempo de percurso	Tempo máximo	
		Janela de tempo	
Produtos	Um único produto (1) / Vários produtos (V)		
	Características do/s Produtos	Peso	
		Volume	
		Formato	
		Perecibilidade	
		Risco	
		Incómodo	
Objectivos	Localizar os CA		
	Determinar os percursos de distribuição e/ou recolha		
	Minimizar	Distância	
		Distância ponderada	
		Custo (em termos financeiros)	
		Peso	
		Risco	
		Perigo	
	Maximizar	Proveito	
		Atracção	

Além da classificação principal, indicada na secção anterior, para a completa clarificação do problema em causa pode ser necessário especificar o número e funcionamento dos CA, o número e forma de operação dos veículos, o tipo de produtos transportados, condições de operação junto do cliente e quais os objectivos a atingir. Sendo assim, os problemas devem ser acompanhados de uma ficha técnica que os identifique sem margem para dúvida. A listagem apresentada na tabela 4.2 é uma base de trabalho para a caracterização complementar dos PLD. Não pretende ser exaustiva, nem o conseguiria ser, uma vez que a investigação não está encerrada e surgem constantemente novos problemas com propriedades específicas. As características que sejam imputadas aos problemas, para além das que são apresentadas, não devem deixar de ser anexadas e alvo de explicação o mais detalhada possível.

4.1.5 Organização e Formalização das Classificações

Até agora, e na ausência de classes que enquadrem os problemas, é a descrição verbal ou textual, mais ou menos pormenorizada, que indica o tipo de problema em estudo, conduzindo muitas vezes a omissões, ambiguidades ou interpretações menos correctas que dificultam a completa apreensão do tipo de problema em estudo. Para ultrapassar estas dificuldades é necessário criar um esquema de formalização das características dos PLD. "Como qualquer outra formalização, um esquema de classificação deve ser conciso e permitir uma descrição precisa da classe do modelo em estudo"², contribuindo assim para uma discussão científica transparente. Além disso, a formalização da classificação pode ainda desempenhar um papel importante na codificação e armazenagem de informação, indispensável aos sistemas de informação bibliográfica e/ou de *software*.

Laporte [127] propôs pela primeira vez uma formalização da classificação de um PLD com recurso a um esquema posicional do tipo $Pos1/Pos2/Pos3/Pos4/\dots$. Segundo o esquema de Laporte, novamente referido em [128] e ainda com mais detalhe em [68], na posição 1 é indicado o número de níveis, sendo que as restantes posições, uma por cada nível, indicam o tipo de rota no nível correspondente. Assim, a posição 2 indica o tipo de percurso efectuado entre o 1º e o 2º nível e assim sucessivamente. Seguindo a mesma metodologia, Hamacher e Nickel [101] propuseram uma classificação posicional para os modelos de localização que, tendo sido usada com sucesso ao longo de vários anos, vem demonstrando as suas potencialidades na formalização das classificações. Acompanhando de perto estas indicações é proposto um esquema de formalização da classificação dos PLD, de base posicional, constituído por 5 posições.

$$Pos1 / Pos2 / Pos3 / Pos4 / Pos5.$$

Em cada posição é indicado um tipo específico de informação.

Pos1— número de níveis;

Pos2— tipo de percurso entre cada par de níveis;

Pos3— espaço de decisão, natureza dos dados e sensibilidade cronológica;

Pos4— função objectivo;

Pos5— particularidades específicas do modelo.

Se há posições que são de preenchimento óbvio, como por exemplo a posição 1, outras carecem de uma descrição das características que lhe estão afectas. Sempre que possível, a simbologia indicada para cada posição segue a que foi proposta por Hamacher

²Citado de Hamacker e Nickel [101].

e Nickel [101]; no entanto, de forma a simplificar o texto são simbolicamente representadas somente as características indispensáveis ao actual estágio de desenvolvimento dos PLD. Por exemplo, não faz sentido considerar na posição 3 o espaço euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , se não é conhecido qualquer PLD que tenha sido definido neste espaço.

Segue-se uma descrição detalhada das características a considerar em cada posição e da sua simbologia.

Pos1 – Número de níveis.

Nesta posição é indicado o número de níveis tendo em conta as diferentes estruturas de localização.

Pos2 – Tipo de percurso entre cada par de níveis.

Percurso utilizado entre cada par de níveis, dos mais baixos (fornecedores) para os mais elevados (clientes), conforme mostra a figura 2.1 (p. 12). É suposto que, pelo menos entre dois níveis os caminhos/rotas não sejam directos.

T Visitas directas a um só cliente (de ida e volta) (*Trips*).

T# Visitas a um só cliente podendo cruzar outros clientes.

R2 Rotas que partem dos CA, visitam dois clientes e regressam ao mesmo CA (*Round-Trips*).

R# Rotas que partem dos CA, visitam vários clientes e regressam ao mesmo CA.

C1 Caminhos entre um cliente e o CA ou *vice-versa*.

C2 Caminhos que partem de um CA mas podem regressar a um outro CA.

C3 Caminhos que partem de um CA, visitam clientes mas não regressam aos CA.

AO Percursos orientados para arcos.

Se há lugar à tomada de decisões num determinado nível, o indicador do percurso surge assinalado com um asterisco. O sentido do percurso é também assinalado com uma seta sobreposta. Seguem-se alguns exemplos.

$3/\overrightarrow{T^*}, \overrightarrow{R}$, Pode traduzir um sistema comum de mercado com três níveis: fábricas, CA e clientes. Estão em causa entregas directas entre as fábricas e os CA (sentido do percurso indicado pela seta sobreposta), tomada de decisões sobre as localizações dos CA (indicado pelo asterisco do lado direito) e o estabelecimento de rotas de distribuição múltipla entre os CA e os clientes (sentido da rota indicado pela seta sobreposta).

$3/^*R^*/\overleftarrow{T}$ Pode referir um sistema relacionado com a gestão do correio com 3 níveis: estações de correio, marcos de correio e clientes. Existem rotas de distribuição múltipla entre as estações dos correios e os marcos de correio (por omissão, a ausência de seta sobreposta pressupõe rotas do nível mais baixo para o mais elevado), localização desconhecida das estações e dos marcos de correio (a aguardar tomada de decisão) indicada pelos asteriscos à esquerda e à direita. Finalmente, existem percursos directos de ida e volta entre os clientes e os marcos.

$2/\overrightarrow{C1}^*$ Pode significar um sistema de transporte de resíduos perigosos com dois níveis: produtores e estações de tratamento. Pretende-se estabelecer os caminhos entre os produtores de resíduos e as estações de tratamento e tomar decisões sobre a localização das estações de tratamento.

Pos3– Espaço de decisão, natureza dos dados e sensibilidade cronológica.

Esta posição admite uma referenciação múltipla de três possíveis características dos PLD.

Espaço de decisão

E Espaço contínuo euclidiano (\mathbb{R}^2).

D Espaço discreto.

G Rede representada por um grafo geral não orientado.

A Rede representada por um grafo em árvore.

F Rede representada por um grafo com caminho entre quaisquer dois nodos.

Natureza dos dados

Det Determinísticos.

Est Estocásticos.

Alteração do modelo segundo determinados períodos de tempo

S Estático.

U Dinâmico.

Pos4– Função objectivo.

Considera-se, por omissão, que a função objectivo é de minimização. Nesta posição são indicados os tópicos relevantes para a identificação da função objectivo.

Max Maximização.

mObj Se $m = 1$, é mono-objectivo. Se $m > 1$ é multi-objectivo.

Dist Distância total percorrida na/s rota/s de distribuição.

\sum Soma Instantânea. Somatório das distâncias euclidianas directas.

\sum_r Soma rectilínea. Somatório das distâncias rectilíneas.

\sum_{ord} Soma ponderada. Por exemplo, pelas encomendas dos clientes e/ou pela carga transportada.

\sum_{prob} Soma probabilística. Em que existe alguma influência probabilística.

WC Custo dos CA. Custos de instalação, operação e manutenção.

WN Número de CA.

VC Custo dos veículos. Custos de aquisição, operação e manutenção.

RC Custo das rotas.

TM Tempo de deslocação.

RK Risco. No caso do transporte de materiais perigosos.

NS Incómodo. Provocado pelo transporte e/ou localização de materiais desagradáveis.

EQ Equidade. Repartição dos riscos de transporte e/ou localização pelas populações afectadas.

Pos5— **Particularidades específicas do modelo.**

São indicadas nesta posição algumas características relacionadas com as restrições do modelo.

LVC Capacidade limitada dos veículos.

LR Rotas/Caminhos de distância limitada.

LWC Capacidade limitada dos CA.

CO Encomendas nos clientes.

MtM Procura e oferta nos clientes.

TW Janelas de tempo.

BR Restrições orçamentais.

Quando nada há a informar numa determinada posição, o seu espaço é ocupado por \bullet . Por exemplo, um \bullet na posição 4 significa que a função objectivo pode ser qualquer. Na posição 3, um \bullet significa que, por omissão, o problema é representado por um grafo geral, determinístico e estático. As características posicionais são sumariadas na tabela 4.3.

Seguem-se alguns exemplos de caracterização de PLD. É indicada a referência bibliográfica, a classificação formal posicional e respectiva ficha técnica, da qual fazem parte as características complementares não inseridas na formalização posicional.

Tabela 4.3: Características posicionais taxonómicas dos PLD.

<i>Pos1</i>	<i>Pos2</i>	<i>Pos3</i>	<i>Pos4</i>	<i>Pos5</i>
Nº	T	<i>E</i>	Max	LVC
	T#	<i>D</i>	<i>mObj</i>	LR
	R2	<i>G</i>	<i>Dist</i>	LWC
	R#	Λ	\sum	CO
	C1	Γ	\sum_r	MtM
	C2	Det	\sum_{ord}	TW
	C3	Est	\sum_{prob}	BR
	AO	S	WC	
		U	WN	
			VC	
			RC	
			TM	
			RK	
			NS	
			EQ	

Exemplo 2

Burness, Robert C. e White, John A., 1976. The traveling salesman location problem [35].

$1 / R\# / E, Est, S / 1Obj, Dist, \sum, \sum_r / \bullet$

Ficha técnica: 1 único CA a instalar entre os clientes.

Exemplo 3

List, George F. e Mirchandani, Pitu, 1991, An Integrated Network/Planar Multiobjective Model for Routing and Siting for Hazardous Materials and Wastes [143].

$2 / C1 / G, Est, S / 3Obj, RC, RK, EQ / CO, BR$

Ficha técnica: Vários potenciais CA com capacidade ilimitada e um custo de instalação limitado por restrições orçamentais. Clientes com fornecimentos distintos. Transporte de um único produto com elevado risco.

Exemplo 4

Nagy, Gábor e Salhi, Saïd, 1998. The many-to-many location-routing problem [166].

$2 / T, R\# / G, Det, S / 1Obj, Dist, WC / LVC, LR, MtM$

Ficha técnica: CA com custo fixo. Clientes com encomendas e/ou fornecimentos distintos. Veículos de maior porte e igual capacidade para transporte directo (camionagem) entre CA, de menor dimensão e igual capacidade para a distribuição entre os clientes, com custos fixos, custos variáveis e tempo máximo por rota contando com o tempo de paragem nos clientes. Produtos a transportar não homogéneos. Minimização dos custos de camionagem, distribuição e dos CA.

Exemplo 5

Murty, K. G. e Djang, P. A., 1999. The U.S. Army National Guard's Mobile Training Simulators Location and Routing Problem [162].

3 / R#, T / G, Est, S / mObj, \sum , WC, WN / CO, LWC

Ficha técnica: Número fixo de CA com capacidade limitada. Clientes com encomendas iguais. Veículos de igual capacidade com limite de distância e escalonamento. Um único produto. Minimização dos custos de camionagem e de distribuição. Decisão sobre a localização dos CA e fábricas.

4.2 Sobre a Complexidade do PLD

4.2.1 Introdução

Os Problemas de Localização-Distribuição são altamente complexos e de resolução muito difícil, não fossem eles construídos a partir de dois dos mais famosos problemas de optimização combinatória, o Problema de Localização-Afectação e o Problema do Caixeiro Viajante, ambos assumidamente pertencendo à classe dos problemas designados por NP-completos. Laporte [131] refere que os PLD são consideravelmente mais difíceis que os Problemas de Rotas de Veículos, também reconhecidamente NP-completos [140]. Bruns e Klose [34] e Srivastava [197] (p. 70) também se referem aos PLD como sendo o resultado de 2 problemas NP-completos e como tal de resolução muito difícil, apresentando todas as condições para serem também considerados NP-completos. Nagy e Salhi [165] são mais directos, classificam os PLD como sendo NP-completos e concluem que somente problemas de reduzida dimensão podem ser resolvidos optimamente. Neste capítulo prova-se que, de facto, assim é.

A classe dos problemas NP-completos possui duas propriedades muito interessantes [175]:

- Nenhum problema NP-completo pode ser resolvido por qualquer algoritmo polinomial conhecido.
- Se vier a existir um algoritmo polinomial para qualquer problema NP-completo, então existirão algoritmos polinomiais para todos os problemas NP-completos.

Apesar dos esforços de muitos cientistas durante décadas, não foi possível ainda construir um algoritmo que resolva polinomialmente um problema NP-completo e, a menos que se venha a provar que a classe dos problemas NP (*Nondeterministic Polynomial time*) é igual à classe P (*deterministic Polynomial time*), será pouco provável que esse algoritmo venha a existir.

Neste sentido, a prova de que um problema é NP-completo é um momento de grande importância na compreensão da natureza do próprio problema e condiciona, sem dúvida, todo o trabalho futuro. Por exemplo, uma vez provado que um problema pertence à classe dos problemas NP-completos, é natural e lógico que se reconheça a

dificuldade na construção de algoritmos que o resolvam optimamente e se opte por outros métodos de resolução aproximada, como sendo os heurísticos.

4.2.2 Noções Prévias

Definição 3

Define-se **conjunto completo** $K = \{\{r_1, r_2, \dots, r_k\}\}$ como sendo um conjunto em que todos os elementos são significativos, mesmo que repetidos.

Propriedades

Da definição anterior seguem-se as seguintes propriedades:

- 1- Dois conjuntos completos são iguais se possuem exactamente os mesmos elementos.
- 2- Um conjunto completo sem elementos repetidos é igual à sua versão não completa.
- 3- A reunião de conjuntos, sendo pelo menos um completo, é um conjunto completo com os elementos de ambos os conjuntos.
- 3- A intersecção de conjuntos completos é um conjunto completo, ou não, com os elementos comuns.
- 4- A intersecção entre um conjunto completo e um conjunto não completo é um conjunto não completo com os elementos comuns.

Definição 4

Seja K um conjunto completo e T a sua versão não completa (com os elementos de K , não repetidos). Então diz-se que K é **formado sobre** T e que T é o **conjunto base** de K .

Exemplo 6

Na teoria de conjuntos, $\{1, 2, 2, 5, 8, 8\} = \{1, 2, 5, 8\}$. Mas, se os conjuntos forem completos, então $\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \neq \{\{1, 2, 5, 8\}\}$.

$$\{\{1, 2, 5, 8\}\} = \{1, 2, 5, 8\}.$$

$$\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \cup \{\{1, 4, 7\}\} = \{\{1, 1, 2, 2, 4, 5, 7, 8, 8\}\}.$$

$$\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \cap \{\{1, 1, 2, 4, 7, 8, 8\}\} = \{\{1, 2, 8, 8\}\}.$$

$$\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \cap \{\{1, 1, 2, 5\}\} = \{\{1, 2, 5\}\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \cap \{1, 2, 4, 7, 8\} = \{1, 2, 8\}.$$

$$\{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\} \text{ é formado sobre } \{1, 2, 5, 8\}.$$

$$\{1, 2, 5, 8\} \text{ é o conjunto base de } \{\{1, 2, 2, 5, 8, 8\}\}.$$

Definição 5

Considere-se um conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$, um conjunto $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ e $K = \{\{r_1, r_2, \dots, r_k\}\}$ um conjunto completo formado sobre um subconjunto de P .

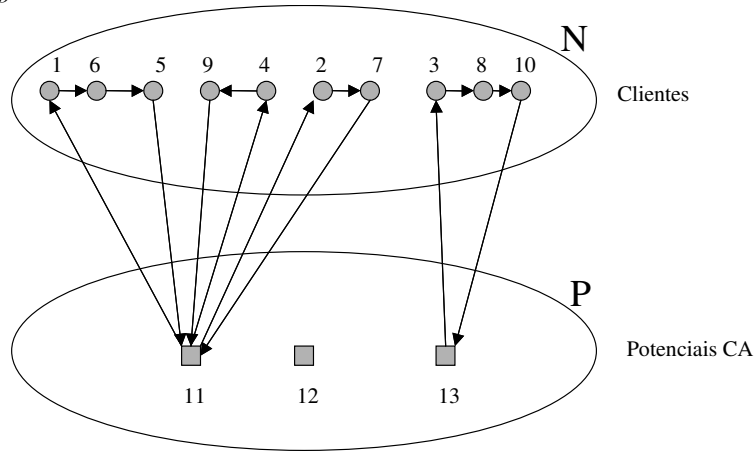
Define-se uma **permutação k -cíclica** π de $N \cup K$ como sendo uma permutação que descreve k ciclos com um e um só elemento de K em cada ciclo.

Exemplo 7

Considere-se os conjuntos $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $P = \{11, 12, 13\}$. Seja $K = \{\{11, 11, 11, 13\}\}$ um conjunto completo formado sobre um subconjunto de P . Pode-se definir a seguinte permutação k -cíclica π de $N \cup K$,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 11 & 11 & 13 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 5 & 11 & 10 & 11 & 13 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A esta permutação corresponde uma solução admissível da instância do PLD apresentada na figura.



Solução do PLD representada por uma permutação k -cíclica.

É de notar que, sendo K completo, o conjunto $N \cup K$ também é completo.

Além disso, os ciclos serão disjuntos e hamiltonianos em N pela própria definição de função permutação e pelo facto de pertencerem ao domínio todos os elementos de N .

4.2.3 Complexidade do PLD

Considere-se uma *versão de optimização* de um PLD sem capacidade, simétrico que verifica a propriedade da desigualdade triangular.

Compõem este PLD um conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ de clientes de localização conhecida, um conjunto $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ de potenciais CA, uma matriz $[c_{ij}]$ simétrica representativa dos custos de ligação entre os clientes, uma matriz $[c_{ik}]$ representativa dos custos de ligação entre os clientes e os potenciais CA e um custo f_k de instalação de cada CA. Pretende-se determinar quais os CA a instalar e as rotas a partir deles para os clientes de forma a minimizar o custo total (custo dos CA instalados mais custo das rotas).

O PLD apresentado é minimalista (seguindo a definição 1 (p. 28)) no sentido em que foi construído de forma a conter as características essenciais para ser considerado um

PLD: decisão simultânea ao nível da localização e da distribuição com custos atribuídos a cada uma das variáveis de localização e distribuição. Como é óbvio, se for provado que este problema "simples" é NP-completo então os demais também o serão.

Não seria viável conceber um processo de avaliação da complexidade que operasse sobre cada problema de optimização. A enorme diversidade de problemas com variadíssimos *inputs*, restrições e objectivos tornaria impraticável a construção de uma teoria coerente e transversal de avaliação da complexidade. Para obviar esta dificuldade, cada problema de optimização é reduzido a um novo problema que admite uma forma de descrição comum. Sobre esta nova versão do problema é possível estabelecer regras e procedimentos de classificação genéricos e independentes do tipo de problema em causa.

Podemos então admitir que, para todo o problema de optimização, dado pela sua *versão de optimização*, é possível construir uma nova versão do problema chamada *versão de admissibilidade* (*reconhecimento* ou *decisão*) susceptível de resposta **sim** ou **não**.

Versão de admissibilidade do PLD ³

INSTÂNCIA: Seja $(N, P, [c_{ij}], [c_{ik}], f_k, L)$ uma instância do PLD em que:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ e $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ são conjuntos finitos, não vazios ($n \geq 2$), representando os clientes e os potenciais CA, respectivamente;

$[c_{ij}]$ é uma matriz simétrica de inteiros positivos cujos elementos representam o custo de ligação entre os clientes $i, j \in N$.

$[c_{ik}]$ é uma matriz de inteiros positivos cujos elementos representam o custo de ligação entre os clientes $i \in N$ e os CA $k \in P$.

$f_k \in \mathbb{Z}^+$, $k \in P$, indica o custo de instalação de cada CA;

L é um inteiro não negativo.

PERGUNTA: Sendo $K = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ um conjunto completo sobre um subconjunto de P e $T = \{t_1, t_2, \dots, t_d\}$ o conjunto base de K , existe uma permutação k -cíclica π de $N \cup K$, tal que $\sum_{i=1}^{n+k} c_{i\pi(i)} + \sum_{i=1}^d f_{t_i} \leq L$?

Uma vez que a versão de admissibilidade não é de resolução mais difícil que a versão de optimização original, qualquer resultado que se venha a provar sobre a complexidade da versão de admissibilidade poderá aplicar-se sem alteração ao problema original. Sendo assim, procede-se à classificação, quanto à sua complexidade, da versão de admissibilidade e estende-se a classificação ao problema de optimização.

A versão de admissibilidade pertence à classe NP se, para cada instância com resposta *sim*, for possível efectuar a confirmação em tempo polinomial. Mais formalmente,

³Em Barreto [11] é apresentada uma versão de admissibilidade para o Problema da p-Mediana Hamiltoniana com algumas semelhanças.

se existe um *certificado de admissibilidade* (de comprimento limitado polinomialmente na dimensão da instância) que pode ser testado em tempo polinomial por um *algoritmo não determinístico*.

Um algoritmo não determinístico é composto por duas etapas separadas e sequenciais. A primeira de conjectura e a segunda de verificação.

1. Dada uma instância do problema, I , na primeira fase é proposta uma estrutura S , obtida de modo não-determinístico (aleatoriamente), tal que $|S| \leq p(|I|)$, para algum polinómio p .
2. Tomando como *inputs* I e S a segunda etapa verifica a resposta *sim* ou *não*.

Um algoritmo não determinístico opera em tempo polinomial se, para cada instância I , existe uma estrutura S que permite uma verificação à resposta *sim* para I e S em tempo polinomial do comprimento de I . É de notar que, na primeira fase, se considerou a estrutura S com dimensão polinomial. Na verdade, S só pode ser verificada em tempo polinomial se tiver uma dimensão polinomial.

Um algoritmo não determinístico polinomial é basicamente um instrumento que permite captar a noção de verificação em tempo polinomial e não um método realista para resolver problemas de decisão. Em vez de existir uma linha de cálculo sobre um dado *input* existem várias, uma para cada possível hipótese.

Nos algoritmos não determinísticos existe também uma falta de simetria relativamente às respostas *sim* e *não*. Se o problema "Dado I , X é verdadeiro para I " pode ser resolvido por um algoritmo em tempo polinomial (determinístico), então o mesmo acontece ao problema complementar "Dado I , X é falso para I ". Esta reversão nem sempre é verificada em problemas resolvidos por um algoritmo não determinístico polinomial.

A classe NP é definida informalmente como sendo a classe dos problemas de decisão que, sob razoáveis esquemas de codificação, podem ser resolvidos por algoritmos não determinísticos em tempo polinomial [80].

Teorema 1

O PLD pertence à classe dos problemas chamados NP.

Prova.

*A versão de admissibilidade do PLD pertence à classe NP porque, dada uma instância $(N, P, [c_{ij}], [c_{ik}], f_k, L)$ com resposta *sim*, podemos comprovar este facto em tempo polinomial exibindo as respectivas rotas. O certificado de admissibilidade desta instância pode ser uma permutação k -cíclica π , representando as rotas e dos CA instalados e satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^{n+k} c_{i\pi(i)} + \sum_{i=1}^d f_{t_i} \leq L$ (tal como definida na versão de admissibilidade do PLD). O algoritmo não determinístico deverá verificar se N , P ,*

$[c_{ij}]$, $[c_{ik}]$, f_k e L são apropriados, se π representa na verdade k ciclos (rotas) com um e um só elemento de K em cada ciclo e se o custo total das rotas e de instalação dos CA é não superior a L . ■

Para provar que o PLD é NP-completo resta somente introduzir o conceito de transformação polinomial.

Definição 6

O problema X diz-se transformável para Y se existe uma transformação construtiva que aplica qualquer concretização do problema X para uma concretização equivalente do problema Y [4].

Se o tempo consumido na transformação for polinomialmente limitado então podemos dizer que X é polinomialmente transformável para Y .

Teorema 2

O PLD é NP-completo.

Prova.

O PLD é NP-completo se:

1. Pertence à classe NP.
2. Todo o problema pertencente à classe NP se pode transformar polinomialmente num PLD.

O ponto 1 já foi demonstrado no teorema anterior.

Tendo em conta que a transformação polinomial goza da propriedade transitiva, para a prova do ponto 2 basta mostrar que um conhecido problema NP-completo é polinomialmente transformável num PLD.

Considere-se uma instância do Problema do Caixeiro Viajante, reconhecidamente pertencente à classe NP [4], representada pelo grafo $G = (V, A, C)$, em que $V = \{1, 2, \dots, t, n+1\}$ representa um conjunto de clientes, A representa as ligações entre os clientes e C o custo associado a cada ligação.

Para transformar esta instância do Caixeiro Viajante numa instância do PLD, basta ampliar o grafo G , juntando $k-1$ ciclos disjuntos, polinomialmente determinados, de forma que em cada ciclo figura um e um só CA.

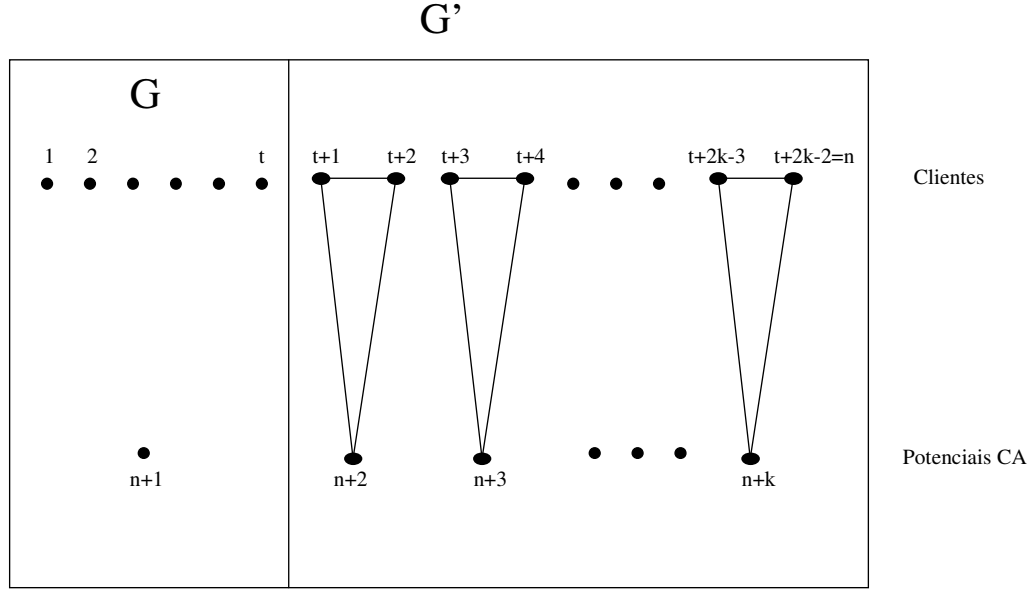
Considere-se então o grafo $G' = (V', A', C')$ tal que:

$$V' = V \cup \{t+1, t+2, \dots, t+2k-2, n+2, n+3, \dots, n+k\}$$

$$A' = A \cup \{(t+2i-3, t+2i-2), (t+2i-3, n+i), (t+2i-2, n+i) : i = 2, \dots, k\}$$

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \Leftarrow (i, j) \in A \\ 0 & \Leftarrow (i, j) \in A' - A \end{cases}$$

Este novo grafo G' é uma extensão do grafo G . Além do grafo G possui $3(k-1)$ arestas disjuntas e respectivos nodos, tal como mostra a figura.



Grafo representativo da transformação polinomial do PCV num PLD.

Um algoritmo para o PLD aplicado a este novo grafo determina k rotas, sendo $k-1$ polinomialmente determinadas e formadas pelas arestas indicadas na figura e uma outra rota correspondente à solução da instância do Caixeiro Viajante em G . ■

4.2.4 A Classe NP-Difícil

Existem problemas que, embora não pertençam à classe dos NP-completos, são mais difíceis que qualquer problema desta classe. Estes problemas formam uma nova classe designada por NP-difíceis.

Um problema de decisão A é NP-difícil se:

- Todo o problema da classe NP é polinomialmente transformável em A .
- Não se consegue provar que A pertence à classe NP.

O termo NP-difícil é, por vezes, usado na literatura para descrever problemas de optimização cuja versão de decisão é NP-completa. Como foi referido no início deste capítulo, não podemos averiguar se um problema de optimização é NP. Em todo o caso, os principais autores no domínio da complexidade [80] [175] preferem aplicar ao problema de optimização a classificação da sua versão de decisão, salvaguardando as diferenças entre ambos.

4.3 Síntese

Neste capítulo foi proposta uma classificação para Problemas de Localização-Distribuição e um esquema de formalização das classificações de base posicional. Além das características principais é indicado um conjunto de características complementares, por enquanto sem representação formal, que devem acompanhar a definição dos PLD. Para completar a identificação do PLD é proposta a junção de uma ficha técnica, onde sejam integradas todas as características complementares e específicas. O trabalho de organização, classificação e identificação formal está em curso, sendo necessário caminhar no sentido da integração progressiva de características complementares junto da representação formal e ao mesmo tempo aprofundar o estudo sobre as classificações principais. Esta proposta é apenas o primeiro passo de uma longa caminhada.

Também neste capítulo se provou que o PLD pertence à classe dos problemas NP-completos e, como tal, é pouco provável que venha a existir um algoritmo que o resolva em tempo polinomial. A afirmação não significa que se deva abandonar a procura de melhores algoritmos de resolução exacta. Laporte et al. [134] sugerem um algoritmo que permite resolver PLD com 25 clientes e 10 potenciais CA. Nesta tese será proposto um algoritmo exacto que opera com problemas de igual dimensão. Pode parecer pouco mas, para um problema de tal complexidade, é já assinalável o caminho que se percorreu em termos da sua resolução exacta. No futuro, novos passos poderão ser dados no sentido de aperfeiçoar estes algoritmos. Os próprios meios de cálculo estão a evoluir rapidamente, são cada vez mais rápidos e espera-se que venham a permitir o cálculo em paralelo, contribuindo para a resolução de problemas maiores. Contudo, reconhecida que é a dificuldade de resolução exacta não nos surpreende que a grande maioria dos autores que se têm dedicado ao estudo de algoritmos para PLD tenha optado pela via heurística.

Parte II

PLD com Capacidade

Capítulo 5

Em Busca de um PLD Representativo

5.1 Introdução

Os Problemas de Localização-Distribuição (com dois níveis) têm como principal característica a simultaneidade de duas decisões, localização de CA e construção de rotas de distribuição por um conjunto de clientes, a partir dos CA instalados. Esta complementaridade, que aproxima os PLD de muitas aplicações práticas, tem motivado e impulsionado a sua investigação ao longo dos anos, sendo sintomático que muitos dos artigos publicados sobre PLD têm como motivação casos reais [138][209][174][103][162].

Mas, esta interligação entre dois objectivos distintos, que desde há quatro décadas tanto tem atraído os investigadores, é também um motivo de conflito entre questões decisórias que, embora estejam relacionadas, não são contabilizáveis sob os mesmos pressupostos. Este capítulo é iniciado com uma abordagem à formalização e resolução do PLD Simples, tal como é apresentado na definição 1. Justificada pela análise dos resultados obtidos nesta fase inicial é proposta uma nova definição para um PLD mais representativo da generalidade das aplicações em LD.

5.2 PLD Simples *versus* PLD com Capacidade

Nesta secção são detectadas algumas limitações do PLD Simples (definição 1, p. 28), abrindo caminho para a proposta fundamentada de uma nova definição de um PLD com capacidade. São ainda analisadas as relações de causa e efeito relativas à grandeza relativa entre os custos de localização e de distribuição.

5.2.1 Formulação Matemática do PLD Simples

As formulações clássicas para o PLD são apresentadas em termos de Programação Linear Inteira (ou binária). São modelos compostos por uma função objectivo restrin-

gida por um conjunto de restrições. Todas as funções são lineares e as variáveis são inteiras ou simplesmente binárias.

Relativamente à elaboração de uma função objectivo têm sido propostas várias alternativas.

O primeiro modelo matemático que integra simultaneamente decisões relativas à localização e à distribuição através de rotas que visitam mais do que um "cliente" deve-se a Or [173][174] e surge na sequência de um estudo sobre a localização de bancos de sangue na área metropolitana de Chicago. A função objectivo é composta pela soma dos custos de distribuição periódica com os custos de distribuição de emergência e os custos do sistema (localização).

Nambiar et al. [168] constroem uma função de custo que integra custos de distribuição, custos das horas extraordinárias e custos fixos por cada CA e veículo. Relativamente à forma como foram obtidos os custos de localização e à sua ordem de grandeza, nada foi dito, mas apontam para um pressuposto que está plenamente enquadrado neste trabalho e poucos realçaram desde então, ou seja, "*...só é instalado um novo CA se a poupança na distribuição o compensar*". Esta constatação, aparentemente inofensiva, é na verdade de extrema importância, traduzindo a verdadeira interligação entre a localização e a distribuição e chamando a atenção para o compromisso que deve existir entre os dois tipos de custos.

Perl [176] usa uma função composta por custos de distribuição e custos de localização, fixos e variáveis. Os custos de localização são traduzidos pela distância euclidiana. Para os problemas teóricos não foi dada qualquer explicação sobre a forma de obtenção dos custos de localização. Relativamente a uma aplicação prática, os custos fixos dos CA correspondem a custos por semana estimados a partir de CA existentes. Os custos variáveis são calculados com base no custo de manuseamento por unidade de carga.

Laporte et al. [134] formam uma função de custo simples com custos de distribuição calculados a partir da distância euclidiana e custos fixos dos CA e dos veículos. As tabelas indicam custos de distribuição médios entre 20 e 30¹ enquanto que os custos fixos vão de 50 a 200.

Berger [21], também conjuga custos de distribuição e de localização com enorme diferença de grandeza. O custo de cada serviço representa entre 50 e 75 % do custo total de distribuição. Só a indicação de um limite à capacidade dos serviços evita que seja instalado um só.

Nagy e Salhi [165] também recorrem a uma função de custo simples, integrando custos de distribuição e de localização, mas nada acrescentam sobre a quantificação dos custos de localização.

¹Tal como em Eilon et al. [67], as coordenadas dos clientes foram geradas aleatoriamente no intervalo [0,100]. Sendo assim, concluiu-se que os valores médios são similares.

Tuzun e Burke [206] definem uma função de custo similar à de Perl mas optam por atribuir um custo fixo aos CA de apenas uma unidade. Promovem desta forma a instalação de mais CA e a melhor distribuição das rotas. Acima de tudo, o modelo fica com liberdade para escolher o melhor CA para cada rota, sem ser condicionado por custos de localização muito altos.

Em comum, todos os autores usam funções de custo com interligação entre custos de distribuição e de localização. Os custos de distribuição são determinados com base na distância euclidiana. Quanto aos custos de localização, ou surgem de uma análise do problema concreto em estudo ou são gerados (muitas vezes aleatoriamente) sem grandes pormenores explicativos sobre a sua ordem de grandeza. Em nenhum dos casos é questionada a relatividade entre os dois tipos de custo e a influência de cada um para a solução final. Contudo, são valores de natureza distinta, usados numa única função. É necessário integrá-los com precaução e relacioná-los com algum grau de conhecimento sobre as suas implicações no modelo, sob pena de influenciarem negativamente o resultado.

Tendo em conta a breve análise sobre as funções de custo que têm sido propostas para PLD, é possível concluir que existe alguma variedade de abordagens mas, ao mesmo tempo, um traço comum incontornável. Todas as formulações sugerem uma função objectivo composta pela soma de custos de distribuição, determinados a partir da distância euclidiana percorrida, com custos de localização. É nessa linha de intersecção das várias proposta que segue a formulação matemática para o PLD Simples apresentada nesta secção.

Para simplificar ao máximo as considerações que se seguem são considerados PLD Simples (tal como consta na definição 1, p. 28). A figura 5.1 esquematiza, com um exemplo, este tipo de PLD, composto por 6 clientes e 3 potenciais CA, com ligações possíveis entre os clientes e entre os clientes e os CA, mas não entre os CA.

A construção de uma formalização matemática para o PLD Simples exige a definição formal de alguns dados indispensáveis. A figura 5.1 ajuda a identificar cada um dos conjuntos e parâmetros.

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$, conjunto com n clientes no plano,
- $P = \{n + 1, n + 2, \dots, n + p\}$, conjunto com p potenciais CA no mesmo plano,
- c_{ij} = custo associado à ligação entre os clientes $i, j \in N$,
- c_{ik} = custo associado à ligação entre os clientes $i \in N$ e os CA $k \in P$,
- f_k = custo associado à activação do potencial CA $k \in P$.

Para cumprir a sua essência de interligação entre a localização e a distribuição as formulações para PLD integram variáveis de decisão relativas a ambos os objectivos.

Definição das variáveis decisão.

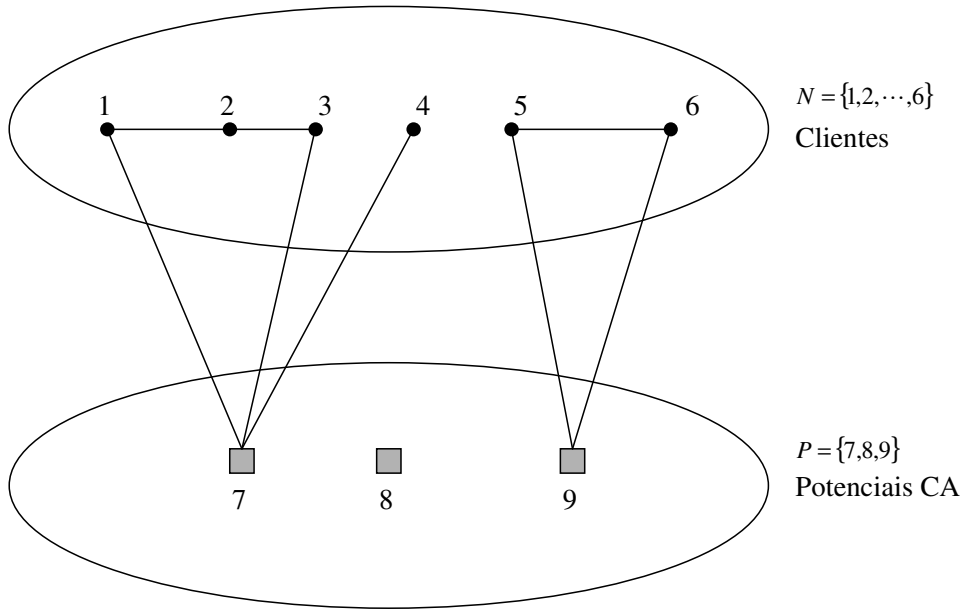


Figura 5.1: Exemplo de um PLD com dois níveis e possível solução.

x_{ij} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o cliente j

x_{ik} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o CA k

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se o CA é instalado em } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando a terminologia proposta para a representação dos dados e das variáveis de decisão, é possível construir uma função objectivo elementar para um PLD Simples não orientado.

$$Z = \sum_{ij \in N, i < j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k \quad (5.1)$$

Fazem parte desta função de custo duas partes com implicações distintas. As primeiras 2 parcelas actuam ao nível da distribuição e representam o custo das rotas de distribuição a partir dos CA, pelos clientes. A última parcela determina a localização e indica o custo da instalação dos CA.

Para obter uma formulação matemática para o PLD Simples, é suficiente minimizar a função objectivo (5.1) condicionada por um conjunto de restrições que impõem a constituição de rotas de distribuição que visitam todos os clientes e são apoiadas nos CA. Segue-se a dita formulação matemática, designada por (*PLDsimples*).

Tabela 5.1: Dados essenciais à definição de um PLD discreto com 2 níveis.

	Clientes	Potenciais CA	Veículos
Dados	Localização no plano	Localização no plano Custo de instalação	Custo de transporte

(*PLDsimples*)

$$\text{Min } Z = \sum_{ij \in N, i < j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

Cada cliente é visitado uma e uma só vez numa só rota.

Cada rota tem partida e chegada a um e um só CA.

5.2.2 Formulação Matemática do PLD com Capacidade

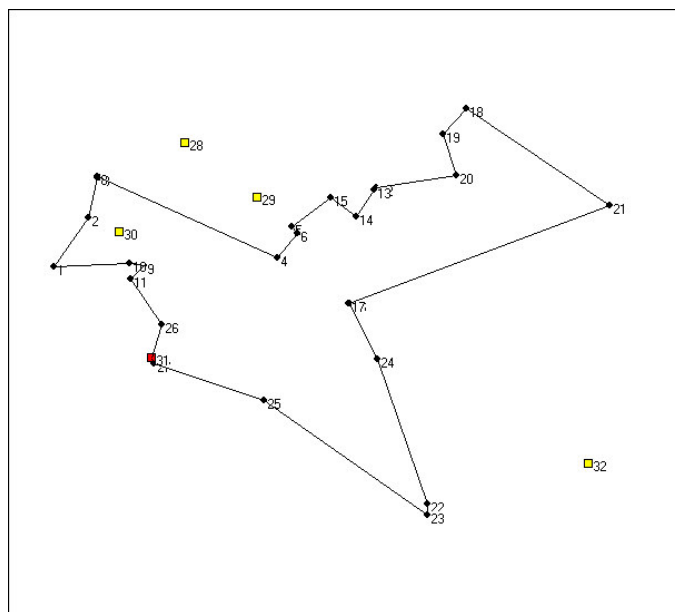
O PLD Simples que esteve na base da formalização matemática apresentada na secção anterior, pressupõe a existência de 3 entidades básicas: os clientes, os potenciais centros de acção e os veículos (rotas). Para concretizar a formalização deste problema são indispensáveis alguns dados: a localização no plano dos clientes e potenciais centros, o custo de instalação dos centros e o custo de transporte (frequentemente é atribuído um custo por unidade de distância percorrida). A tabela 5.1 sintetiza os dados indispensáveis à completa caracterização de um PLD Simples.

A adopção, sem alguns cuidados de restrição adicional, da formulação *PLDsimples* comporta alguns perigos que convém reter. O exemplo seguinte serve como introdução ao estudo de alguns destes precalços.

Exemplo 8

A partir de dados fornecidos por Min et al. [157] foi possível construir uma instância do PLD Simples. É conhecida a localização de 27 clientes, identificados na figura seguinte por pequenos círculos, e de 5 potenciais CA, representados por quadrados. O custo de transporte é de 1 unidade monetária por unidade de distância euclidiana percorrida e o custo de instalação de cada CA é de 272 unidades monetárias. Os dados relativos a esta instância (Min92 – 27 × 2) podem ser consultados no apêndice A (p. 229).

Além da representação gráfica dos dados relativos a este PLD, a figura mostra também a sua solução óptima.



Solução óptima de um PLD simples adaptado da literatura [157].

O exemplo 8 mostra uma solução que cumpre todos os pressupostos impostos pela definição do PLD Simples, mas não deixa de ser interessante verificar que é algo desequilibrada. A ausência de restrições que limitem a dimensão das rotas conjugada com o facto de o custo de transporte ser proporcional à distância², conduz inevitavelmente à construção de uma única rota. Na verdade, é mais "barato" seguir directamente de um cliente para outro do que fazer esse trajecto passando por um CA. Como é do senso comum, esta situação não é representativa da maioria dos PLD da vida real. As rotas são percorridas por veículos ou pessoas, os quais, podem apenas efectuar percursos com dimensão finita. Sendo assim, é de concluir que a definição 1 deve ser enriquecida com a introdução de restrições que impeçam a constituição de uma só rota. A construção de modelos matemáticos que permitem rotas de qualquer dimensão tem apenas interesse teórico.

Impor explicitamente um número mínimo de rotas é uma opção, embora pouco eficaz, porque conduz quase sempre à constituição de rotas muito desequilibradas, em termos de dimensão. Em geral, instala uma rota com a maioria dos clientes e as restantes com um reduzido número. Mais interessante, é a consideração de um limite à dimensão da rota, incentivando a formação de rotas mais equilibradas. Parece ser uma boa ideia, mas... como concretizá-la ?

Desde logo, e sem introduzir novos dados, para além dos elementares, relatados na tabela 5.1, é possível simplesmente limitar a distância de cada rota. Existindo uma relação com a distância percorrida é possível substituí-la pelo custo, o tempo, o

²A distância referida foi determinada através da métrica euclidiana que goza da propriedade da desigualdade triangular.

perigo, a contaminação, a satisfação do cliente, o nível de atracção de clientes, etc.. No entanto, se as rotas forem percorridas por veículos de capacidade limitada (situação mais comum) corre-se o risco de obter rotas que, apesar de cumprirem as restrições de custo, excedem a capacidade do veículo que as percorre.

Outra alternativa para limitar a dimensão das rotas é recorrer a características relacionadas com os clientes. Atribuindo um peso (encomenda) a cada cliente, é possível formar rotas com um determinado peso máximo. Neste caso, é necessário introduzir novos dados (encomendas dos clientes) mas, em contrapartida, as rotas passam a ser limitadas pela capacidade dos veículos que as percorrem.

Por vezes, estas medidas limitadoras da dimensão da rota não podem ser usadas separadamente. Se a rota for apenas limitada pela capacidade máxima (em termos de encomendas) pode acontecer que existam rotas com distância muito variada, umas percorridas em minutos ou horas e outras em vários dias. Por outro lado, limitar somente a distância pode conduzir a rotas com centenas de clientes (dentro de uma cidade) e outras com um ou dois clientes (em zonas rurais). É necessário avaliar os dados do problema e decidir em conformidade.

Obviamente, o equilíbrio "máximo" na dimensão das rotas pode ser alcançado com a conjugação de restrições sobre o custo com restrições sobre a capacidade. No entanto, como já se afirmou anteriormente, o objectivo é alcançar a definição de um PLD que integre as bases essenciais à sua aplicação aos casos reais, apelando a uma perspectiva minimalista, sem acrescentar nada que possa complicar desnecessariamente o PLD definido. Sendo assim, por várias razões, a opção pelo limitador das rotas recai sobre a capacidade.

Desde logo porque permite uma maior simplicidade de formulação matemática. Nas formulações com 2 índices (como a *PLD simples*) a impossibilidade de aceder directamente ao percurso de uma rota complica a inclusão de restrições de custo³.

Em segundo lugar, a restrição de capacidade das rotas não significa uma ausência de controle sobre o seu custo, sendo certo que a função objectivo ao procurar a solução de custo mínimo conduz implicitamente à formação de rotas de menor custo.

Outro factor importante é a identificação que é efectuada entre cliente e encomenda. É normal e frequente a existência desta situação, sendo transversal a muitos PLD da vida real. Na ausência de encomendas nos clientes é possível atribuir artificialmente encomendas a todos os clientes (provavelmente iguais) e formar, desta forma, rotas equilibradas.

Por último, surge uma questão de hierarquia entre o custo (relacionado com a distância) da rota e a sua capacidade. Na vida real é possível percorrer mais alguns metros ou quilómetros numa rota, mas não é legalmente admissível a sobrecarga de um veículo que já atingiu a sua capacidade máxima.

³A complicação é mais do ponto de vista formal e não relativa à sua dificuldade da resolução.

O desequilíbrio da solução ilustrada no exemplo 8 não se limita apenas à dimensão das rotas, também a dimensão dos CA instalados não obedece a qualquer controlo. Como resultado, é aberto um único CA que suporta a única rota existente.

O que acontece na maioria das aplicações práticas é que o custo de instalação dos CA é bastante elevado quando comparado com o custo médio de ligação entre dois clientes ou entre os clientes e os CA. Desta forma, há uma enorme predisposição para a instalação de um único CA. Atribuir-lhes um custo de instalação baixo ou nulo propicia a abertura de mais CA mas, se o custo for insignificante, há uma tendência para fomentar a instalação de muitos CA, provavelmente desnecessários.

Uma forma de ultrapassar esta incerteza quanto aos valores a atribuir ao custo de instalação dos CA é limitar o número de rotas por CA. Uma vez que, a propósito do controlo da dimensão das rotas, foi defendida a conveniência da existência de uma encomenda por cliente, esta informação pode também ser aproveitada para equilibrar o número e dimensão dos CA, atribuindo-lhes uma capacidade máxima. Desta forma, obtêm-se PLD mais próximos das aplicações da vida real e evitam-se surpresas provocadas por uma avaliação menos correcta da relação entre os custos de localização e distribuição, garantindo a abertura de CA com dimensão aceitável e pré-definida.

Na verdade, a real relação entre os custos de localização e de distribuição é uma questão ainda em aberto e pouco investigada, quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista prático, conduzindo a uma utilização de valores pouco fundamentados e sem uma perfeita consciência da sua influência nas soluções dos PLD. Neste sentido, a existência de capacidade limitada dos CA contribui de forma natural para atenuar os possíveis efeitos perniciosos decorrentes do uso de custos de natureza distinta na função objectivo. A dificuldade em conjugar os custos de distribuição com os de localização tem sido realçada por vários autores. Um pequeno desvio nestes parâmetros pode conduzir facilmente a soluções que concentrem toda a actividade num só CA, de capacidade incomportável. Na secção seguinte é apresentada um breve reflexão introdutória sobre este tema.

Em face dos condicionalismos de que enferma a definição inicial do PLD Simples, é conveniente e oportuno propor um novo PLD acrescentando dois tipos de restrições visando a constituição de rotas equilibradas e a instalação de CA de dimensão aceitável. Pelas razões já expostas, esse objectivo será alcançado com base na atribuição de encomendas (peso) aos clientes.

Definição 7 *PLD com Capacidade (PLDC)*

Considere-se um conjunto de clientes e um conjunto de potenciais CA representados por pontos no plano. Os clientes são servidos por rotas de veículos que partem de um CA e voltam ao mesmo CA.

A cada cliente corresponde uma encomenda, em unidades de carga.

Os veículos (rotas) e os potenciais CA admitem capacidade limitada, em unidades de carga.

Pretende-se:

- *Determinar quais os CA que são efectivamente instalados,*
- *Desenhar as rotas a partir dos CA instalados pelos clientes,*
- *Minimizar o custo total (de localização e distribuição).*

O PLDC assim definido está, sem dúvida, muito mais próximo da maior parte das aplicações reais e conduz a soluções mais equilibradas em termos de dimensão das rotas e CA, actuando como uma segurança relativamente a possíveis malefícios decorrentes da interpretação deficiente dos custos de natureza distinta relativos à localização e à distribuição.

Trata-se de um PLD minimalista, que integra somente as características mais comuns, quer do ponto de vista teórico quer no aspecto prático. É a procura de delimitação e construção de um PLD que possa servir como ponto de referência, sobre o qual se possam estudar e desenvolver novas técnicas de formalização e resolução. A ideia é fundamentar o elementar e contribuir desta forma para a construção de um patamar que permita a evolução para PLD mais elaborados.

A formulação matemática do PLDC é, no essencial, idêntica à formulação (*PLDsimples*, p. 101), acrescentando-se as restrições que limitam a capacidade dos veículos e dos CA.

(*PLDC*)

$$\text{Min } Z = \sum_{ij \in N, i < j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

Cada cliente é visitado uma e uma só vez numa só rota.

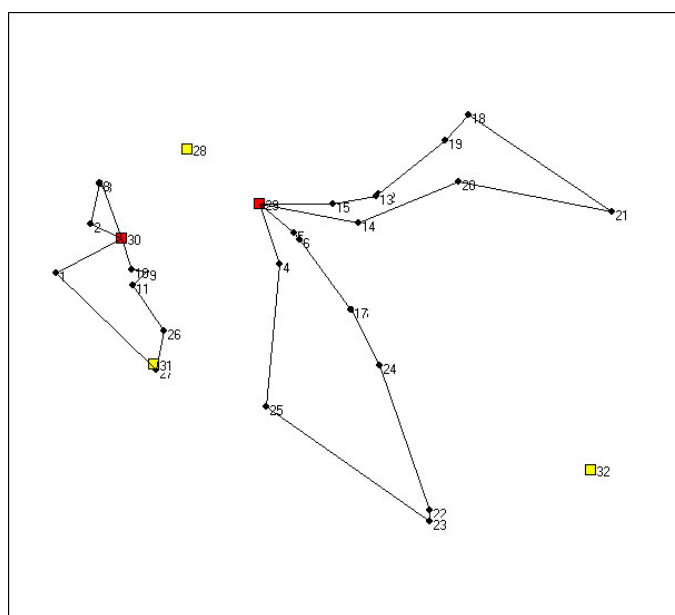
Cada rota tem partida e chegada a um e um só CA.

Os veículos admitem capacidade máxima.

Os CA admitem capacidade máxima.

Exemplo 9

Ao PLD considerado no exemplo 8 (p.101) são agora acrescentadas encomendas em cada cliente (ver apêndice A) e capacidade máxima dos veículos e CA de 2500 e 9000 unidades de carga, respectivamente. A solução óptima deste PLDC pode ser observada na figura seguinte. Comparada com a solução obtida no exemplo 8, é mais equilibrada e mais realista. As rotas cumprem os limites de capacidade dos veículos que as percorrem. A incapacidade de resposta de um só CA leva à instalação de dois.



Solução óptima de um PLDC adaptado da literatura [157].

5.3 Relação Entre Custos de Distribuição e de Localização

5.3.1 Introdução

A função objectivo do (PLDC) é formada pela integração de dois tipos de custos de natureza distinta, o custo de distribuição e o custo de instalação dos CA. Na secção anterior foi já referida a ausência de estudos sobre as reais implicações de cada um destes custos nas soluções do problema. Na verdade, muitos autores têm vindo a referir a dificuldade sentida no ajuste entre estes dois tipos de custos; uns, de longo prazo, relacionados com a localização e outros, de curto prazo, imputados à distribuição. Com maior ou menor justificação têm surgido as mais variadas propostas sobre a quantificação destes custos, mas é necessário ter em conta, tal como se afirmou na secção anterior que, mesmo pequenas alterações na sua grandeza relativa, podem influenciar substancialmente o resultado final.

Estabelecer uma verdadeira relação entre os custos de localização e distribuição só é possível depois de avaliar e quantificar os custos reais de cada um dos elementos. Só a partir do perfeito conhecimento das partes é possível ter uma visão geral de como se relacionam.

Tanto quanto foi possível investigar, não existem estudos concretos e suficientemente abrangentes nesta área, existindo apenas alguns dados e pequenas investigações que serão explanadas nesta secção, começando pelo custo de distribuição.

Em 1967, Neuschel [171] já se referia à contradição existente entre a importância reconhecida ao custo de distribuição no sistema logístico geral e o conhecimento quase

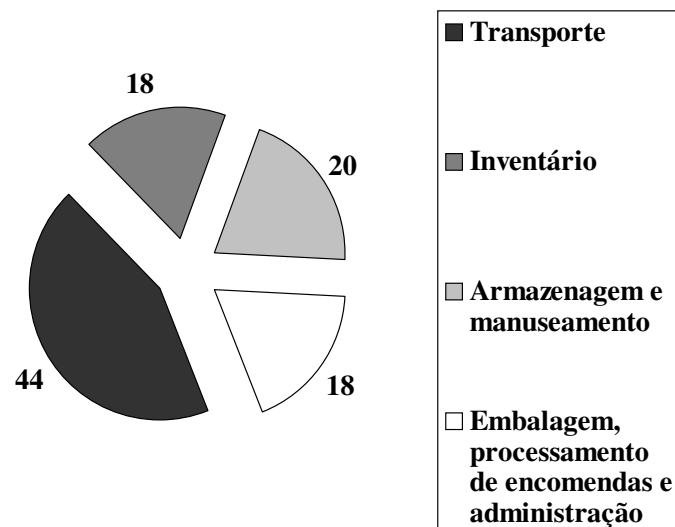


Figura 5.2: Custos de um sistema de distribuição. Fonte [171].

incipiente sobre a distribuição e respectivo custo. Baseado em dados relativos à gestão da distribuição em 26 grandes companhias, o autor refere que, na indústria de extracção de metais e petróleo, o custo de distribuição situavam-se em 25% enquanto que na indústria alimentar ascendiam a 30%. Valores muito significativos, comparados com o quase inexistente investimento na melhoria dos sistemas de distribuição. Neuschel realça a importância do custo de transporte nos sistemas de distribuição, e relativiza percentualmente os diversos tipos de custo tal como mostra a figura 5.2.

Geoffrion e McBride [84] referem estudos que indicam o custo de distribuição pelos clientes como sendo 10 vezes superiores ao custo de camionagem entre as fábricas e os CA. Reconhecem também a necessidade de representar com o máximo de precisão o custo de distribuição e em particular o custo de transporte.

Nambiar et al. [168] afirmam, a propósito de um problema relacionado com a indústria de borracha na Malásia, que o custo de distribuição contribui com 20 a 30% para o custo total do sistema de Localização-Distribuição.

Muito referenciada, tem sido a tabela 5.2 apresentada por Ballou [10]. Nela podem ser observados custos da logística e, em particular, os que estão directamente relacionados com a localização e a distribuição.

Srivastava [198] refere estudos que indicam o custo de distribuição nos Estados Unidos no final da década de 80 como representando mais de 7,5% das vendas, continuando a crescer a um ritmo de 12% entre 1980 e 1988. O autor refere que o custo de transporte e armazenagem contribuía com 60% para o total dos custos da logística e apresenta alguns valores relativos à razão entre os custos de localização e de distri-

Tabela 5.2: Custos da logística em termos de percentagem das vendas.

INDUSTRY	AD	TR	IC	WA	RS	PA	OP	TO
Chemical and plastics	0.3	6.3	1.6	3.3	0.7	1.4	0.6	14.2
Food manufacturing	0.4	8.1	0.3	3.5	0.9	---	0.2	13.4
Pharmaceutical	0.7	1.4	---	1.2	0.5	0.1	0.5	4.4
Electronics	1.2	3.2	2.5	3.2	0.9	1.1	1.2	13.3
Paper	0.2	5.8	0.1	4.6	0.3	---	0.2	11.2
Machinery and tools	0.5	4.5	1.0	2.0	0.5	1.0	0.5	10.0
All other	1.2	6.8	1.0	2.9	1.4	0.4	0.4	14.1
All manufacturing companies	0.5	6.2	1.3	3.6	0.8	0.7	0.5	13.6
All merchandising companies	1.2	7.4	10.3	4.2	0.6	1.2	0.7	25.6
Consumer goods	1.3	8.1	8.5	4.0	0.9	0.9	0.5	24.2
Industrial goods	0.7	5.9	13.7	2.9	0.2	2.0	1.0	26.4
Food and food products	1.68	16.64	NSI	9.46	F	4.23	NSI	32.01
Primary and fabricated metals	4.30	10.02	NSI	11.9	F	2.93	NSI	29.23
Chemical, petroleum, rubber products	1.13	13.80	NSI	8	---	2.27	NSI	23.80
Paper and paper products	0.53	8.43	NSI	6.13	---	3.48	NSI	18.13
Textiles	0.71	5.52	NSI	5.69	---	2.18	NSI	16.15
Wood products (including furniture)	1.09	11.10	NSI	7.74	---	1.76	NSI	15.99
Transportation equipment	0.45	7.10	NSI	2.04	---	1.13	NSI	10.22
Machinery (electric and nonelectric)	0.21	7.75	NSI	1.54	---	0.83	NSI	10.02
Average	1.27	10.05	---	5.72	---	2.41	---	19.44
270-company composite	2.4	6.4	3.8	3.7	---	4.3	1.2	21.8

AD=Administration

TR=Transportation

IC= Inventory Carrying

WA=Warehousing

RS=Receiving and Shipping

PA=Packing

OP=Order processing

TO=Total

NSI=Not specifically identified or included

F=Combined with packing costs.

buição: na indústria farmacêutica 0,26, na indústria do papel 0,85 e na indústria dos bens de consumo 1,56. Estes valores são apontados como referência, marcando uma amplitude que se deverá manter para os outros sectores.

Mais recentemente, Lambert e Stock [124] (p. 7) contabilizam, conforme é ilustrado na figura 5.3, os custos associados com a logística.

Apesar de ser possível observar alguns dados e afirmações dispersos em várias publicações, não existem estudos que, à escala mundial, de cada país ou região, apresentem dados concretos e pormenorizados sobre o custo de distribuição por sector. É uma falha assinalável tanto mais que se reconhece que a distribuição assume uma enorme importância à escala global.

Um estudo de Kearney [117] refere a possibilidade de uma companhia média americana poder melhorar em 20% ou mais a sua produtividade, se conseguir maior eficácia no seu sistema de distribuição.

De acordo com Srivastava e Benton [199], o custo total de transporte e armazenagem contribui com 20% para o GNP (Gross National Product) americano. Sendo assim, mesmo uma pequena melhoria no uso e racionalização destes sistemas conduziria a uma enorme poupança.

Thomas [204] afirma que os custos totais de logística (inventário mais transporte) nos Estados Unidos diminuíram de 13% do GDP (Gross Domestic Product) em 1985 para 10,5% em 1993, em grande parte devido ao rigoroso controlo de inventário ao longo

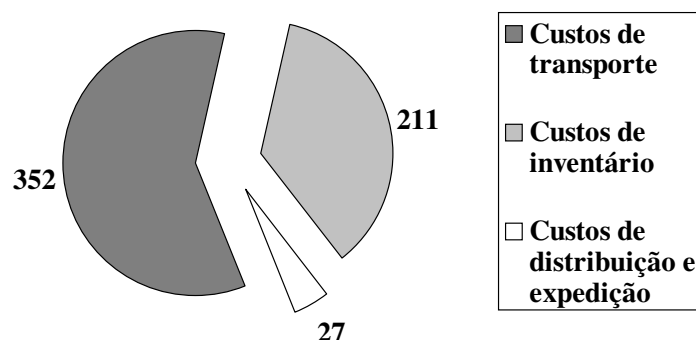


Figura 5.3: Custos (em bilhões de dólares) imputáveis à logística nos Estados Unidos da América em 1990. Fonte [124].

das cadeias de distribuição⁴. Mas, desde 1993, este custo tem-se mantido constante, revelando que são necessárias ferramentas mais eficazes que analisem de forma integrada os custos de inventário e de distribuição.

Relativamente ao custo de localização, a informação existente ainda é menos completa e não vai além de uma série de conselhos e boas práticas de localização, sem qualquer tipo de quantificação de custos. Para esta etapa muitas vezes são recolhidos dados relacionados com o histórico das empresas, ouvidas as opiniões dos gestores e dos encarregados dos CA, obtendo-se desta forma um valor correspondente ao custo real de instalação de cada CA.

A nível internacional, a KPMG, uma firma internacional que presta serviços na área económica e financeira, tem avaliado periodicamente o custo de localização em vários países. Com base no preço da propriedade industrial, da energia eléctrica, da construção e carga fiscal, tem apresentado indicadores sobre o custo de localização, especialmente relativo aos países do grupo designado por G8.

O país que melhor tem aproveitado estes dados, explorando o mais possível as indicações que têm sido dadas sobre o seu custo de localização, tem sido o Canadá. Ao compreender que teria aqui uma boa oportunidade para captar investimento, este país tem vindo a disponibilizar e divulgar alguma informação sobre todo o tipo de custos relacionados com a localização, quer de indústrias, quer de pessoas, especialmente no

⁴Nozick e Turnquist [172] também comentam estes resultados.

que diz respeito ao estado do Ontário⁵.

Tirando casos isolados, como o que foi referido no parágrafo anterior, não são públicos outros estudos que permitam contabilizar com algum fundamento o custo de localização de pessoas e bens a nível internacional, regional ou local e muito menos tendo em conta o sector de actividade.

Se, em cada uma das áreas, distribuição e localização, são exíguos os estudos sobre o respectivo custo, no que diz respeito à relativização entre os dois tipos de custo o panorama não é mais animador.

Harrison [103] apresentou um estudo relacionado com um PLD numa grande empresa farmacêutica irlandesa, indicando um custo médio de localização de 1,591 libras por unidade de carga e um custo médio de distribuição de 0,147 libras por milha.

Perl [176] apresentou também dados sobre um PLD real com 318 clientes e 4 potenciais CA, relacionado com uma companhia de distribuição americana⁶. Considerando que os CA instalados são plenamente utilizados (o que permite a contabilização conjunta de custos fixos e variáveis) o custo de localização é de 43% e o de distribuição 57%.

Laporte et al. [136] apenas referem que os custos foram calibrados de forma a permitir uma abordagem mono-critério. Pouca informação, tendo em conta o interesse e as implicações destes custos na resolução dos PLD.

Chien [43] afirma que os custos de localização e de distribuição foram adaptados de forma a terem como base o mesmo horizonte temporal mas, tal como Laporte, não especifica os pesos atribuídos nem fundamenta a sua quantificação.

Srivastava e Benton [199] foram provavelmente os primeiros a apresentar alguns resultados fundamentados em testes computacionais. Começam por afirmar que, na indústria americana, a relação entre os custos de distribuição e de localização é de 200 para 125, o que significa uma percentagem de 62% para a distribuição e 38% para a localização. Os seus estudos mostram que a razão entre custos de localização e de distribuição pode variar entre 0.26 e 1.56. Testam ainda a sensibilidade do número de CA face a 3 estruturas de custos (baixa, média e alta) e à distribuição espacial dos clientes. Baixo custo de localização e alto custo de distribuição podem beneficiar de um grande número de CA, caso seja possível instalá-los. Em contrapartida, será de instalar um reduzido número de CA quando o seu custo é superior ao da distribuição.

Um dos poucos estudos nesta área foi apresentado por Serra⁷ [190]. Trata-se de uma investigação concreta e explícita sobre a relação entre os custos da logística no caso da distribuição industrial a nível Europeu. A figura 5.4 indica os resultados. Segundo este

⁵No endereço <http://www.2ontario.com/welcome/home.asp> é possível consultar o custo de localização nesta região do Canadá. Verificado em 22/04/2004.

⁶Podem ser consultados no apêndice A.

⁷O autor apresenta como fonte dos dados o *European Group in Commercial Logistics (Administration, warehousing & outbound transportation costs)*, *Corporate Planning (Capital & obsolescence costs)*, *European Logistics Division (Inbound transportation costs)*.

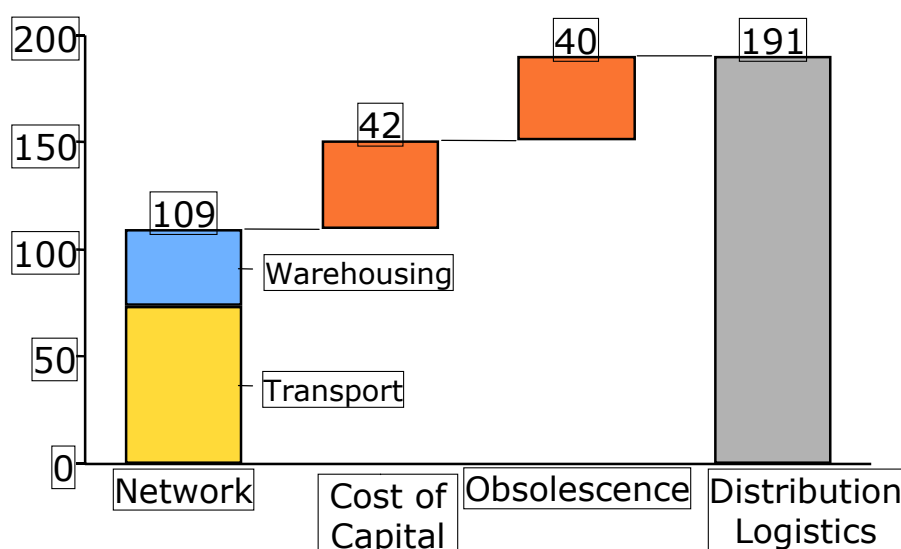


Figura 5.4: Custos da distribuição logística no caso de uma empresa de alta tecnologia (em milhões de dólares). Fonte [190].

estudo os custos de distribuição e localização, representam 57% do total. Embora não conste no gráfico, foi sugerido pelo autor que o custo de transporte pode rondar os 62 milhões de dólares. Desta forma, contando somente com os custos de distribuição e de localização, teremos 57% para os primeiros e 43% para os segundos, curiosamente valores exactamente iguais aos determinados pelo exemplo prático de Perl. É um estudo interessante na medida em que revela uma relação entre custos de localização e de distribuição algo equilibrada. É óbvio que esta relação de custos depende da área de intervenção, mas neste caso concreto o custo de localização está muito abaixo do que é comum observar.

Daskin [58] (pp. 247-249) apresenta um estudo sobre a relação entre o custo de localização, o custo de distribuição e o número de CA instalados. Com base numa instância do PLD composta por 49 cidades americanas [58] (p. 480), faz variar o custo de distribuição e avalia o número de CA instalados. A tabela 5.3 foi adaptada a partir do custo por milha indicado por Daskin, considerando uma distância média entre cidades de 1302 milhas⁸ e uma encomenda média por cliente de 509552. Como exemplo, o custo de distribuição apresentado na primeira linha é dado por:

$$1302 \times 0.00001 \times 509552 = 6634$$

Os resultados da tabela 5.3 não deixam margem para dúvidas sobre a forma como

⁸A partir do ficheiro de dados é possível concluir que a distância média entre os clientes (cidades) é de 19,6 unidades de distância. Por consulta da distância real entre algumas cidades americanas foi possível extrair uma relação de 66,45 milhas por unidade de distância. A multiplicação dos dois valores permite concluir que a distância média entre cidades é de 1302 milhas.

Tabela 5.3: Variação do número de CA com o custo de distribuição.

Custo de Localização	Custo de distribuição	Nº de CA instalados
500 000	6 634	1
500 000	66 344	3
500 000	663 437	10
500 000	6 634 367	38
500 000	66 343 670	72

o número de CA varia com a alteração da relação entre os custos de localização e distribuição.

5.3.2 Argumentação Prática

Na secção anterior foram apresentados vários estudos que fornecem pistas para uma relativização entre os custos de localização e distribuição. São dados que surgem sob determinados pressupostos carregando todo o enquadramento empresarial ou organizacional das suas fontes. Mesmo os modelos matemáticos mais complexos estão ainda longe de representar esta realidade com rigor, limitando-se a criar aproximações simplificadas da enorme complexidade destes problemas. Sendo assim, a validação dos resultados deve ter em conta as limitações dos modelos, percebendo que não traduzem a nossa visão ampla da realidade, mas sim uma solução do modelo matemático que a tenta representar. Na verdade existem aqui duas entidades; uma é a realidade que fornece e determina a quantificação de valores, outra é a forma como o modelo matemático interpreta e conjuga estes valores. A solução que advém da aplicação do modelo matemático é, tão só, isso mesmo, uma solução que responde unicamente ao modelo matemático, nem mais, nem menos, pode ser inferido.

Estão em causa dois objectivos integrados na mesma função. No entanto, o modelo matemático é insensível a esta situação e reage apenas ao coeficiente de cada variável na função objectivo, assegurando que fazem parte da solução as variáveis menos penalizantes dessa mesma solução. O tratamento mono-critério da função de custo, coloca em pé de igualdade as variáveis de localização e distribuição, cuja activação apenas depende dos seus coeficientes (os custos unitários c e f) que, embora de natureza distinta, influenciam de igual modo o resultado final. A presença ou ausência das respectivas variáveis na solução óptima pode depender, por vezes, de pequenas variações nos coeficientes. O modelo matemático não transporta o nosso conhecimento sobre a natureza de ambos os custos. Para o modelo trata-se apenas de variáveis que farão parte da solução se o respectivo custo unitário for relativamente baixo e as restrições assim o permitirem.

Para validar as diferentes propostas de relativização de custos de localização e distribuição e verificar como influenciam o número de CA instalados, foram efectuados

Tabela 5.4: Características de três instância do PLD.

Instância		n	p	NMR
A	Perl83-12x2	12	2	3
B	Christofides69-50x5	15	4	3
C	Perl83-55x15	20	5	4
n = Número de clientes. p = Número de potenciais CA. NMR = Número mínimo de rotas.				

alguns testes recorrendo a três instâncias de PLD formadas a partir de ficheiros de dados propostos por Perl [176] e Christofides e Eilon [46] (consultar apêndice A). As características e origem das três instâncias que serviram de base aos testes são indicadas na tabela 5.4⁹.

O número mínimo de rotas não é imposto explicitamente mas sim uma consequência da limitação da capacidade dos veículos. A fim de poder avaliar a variação do número de CA face às alterações no custo de localização, considera-se que estes admitem capacidade ilimitada.

As instâncias foram resolvidas a partir de uma formalização do tipo (*PLDC*) (p. 105).

Foi usado um computador do tipo PC¹⁰ e recorreu-se à linguagem de programação Delphi 7.0 [31] com integração da rotina *CPXmipopt* para resolução de problemas de programação linear inteira, disponível na *Callable Library* do programa comercial *ILOG CPLEX 7.1* [108].

O método de resolução será mais pormenorizado no capítulo 7, por agora é suficiente reter a ideia geral de funcionamento que integra os três passos seguintes:

- Numa primeira fase, é resolvido um sub-problema obtido por relaxação das restrições que impedem a formação de rotas sem CA, rotas com dimensão superior à permitida e cadeias entre CA;
- Numa segunda fase, as restrições omitidas na fase anterior são acrescentadas à medida que forem sendo violadas e o problema é novamente otimizado;
- O processo continua até que não existam mais restrições violadas.

Para cada instância foi determinado o custo médio das ligações entre os clientes ($\bar{C} = \frac{\sum_{i,j \in N} c_{ij}}{n}$). Este custo será tomado como referência para fazer variar o custo de instalação dos CA (f_k). Os dados obtidos são ilustrados pela tabela 5.5.

⁹Nas instâncias B e C considera-se somente alguns dos primeiros clientes ou potenciais CA.

¹⁰Modelo: DELL OPTIPLEX GX 240. Processador: Intel[®] Pentium[®] IV a 1,5 Ghz. Memória: 128 MB.

Tabela 5.5: Variação do número de CA instalados face ao custo de instalação.

Instância	\bar{C}	Nº CA instalados		
		3 CA	2 CA	1 CA
A:Perl83-12x2	15.5	—	$f \leq 14$	$f \geq 15$
B:Christofides69-50x5	31.9	$f \leq 5$	$6 \leq f \leq 22$	$f \geq 23$
C:Perl83-55x15	24.7	$f \leq 2$	$3 \leq f \leq 16$	$f \geq 17$

A primeira observação que os resultados motivam prende-se com a sensibilidade do número de CA instalados face a custos unitários de instalação muito baixos, em geral, da mesma ordem de grandeza do custo médio de distribuição. Mesmo com um custo de instalação dos CA, em média, 20% abaixo do custo médio de ligação entre dois clientes, todos os problemas reduzem o número de CA a um só. Não deixa de ser curioso este resultado uma vez que muitos autores trabalham com um custo de instalação dos CA muito superior ao custo de distribuição. Perl [176] chega a propor uma instância com custo de localização 40 vezes superior ao custo médio de distribuição. Desta forma está simplesmente a impor ao modelo a instalação de um único CA, como aliás veio a acontecer¹¹. Para o modelo matemático apenas é relevante o coeficiente de cada variável e muito dificilmente fará parte da solução uma variável com custo unitário 40 vezes superior às restantes, a menos que a sua presença seja imposta.

Do ponto de vista teórico, os resultados ilustrados na tabela 5.5 chamam mais uma vez a atenção para a existência de uma função que conjuga dois objectivos distintos que só entrarão em "saúdável" confronto se os custos unitários forem da mesma ordem de grandeza.

Do ponto de vista prático, existe uma tendência para considerar o custo de localização maior que o de distribuição. Os resultados teóricos contrariam esta visão e chamam a atenção para a necessidade de contabilizar de forma distinta o custo de instalação dos CA. Com uma aplicação temporal bastante dilatada, o custo de instalação dos CA e de distribuição não podem ser simplesmente considerados a partir de um ponto de vista momentâneo, é necessário dilui-los no tempo e contar com o valor permanente do imobilizado. Se assim acontecer, não é de todo surpreendente que os custos unitários de localização e distribuição possam ser equiparados.

Na ausência de segurança sobre a grandeza relativa destes dois tipos de custos, pode acontecer a instalação de um número exorbitante de CA motivada por um custo de localização demasiado baixo. É uma situação que deve ser alvo da análise do investigador, detectada quando surgem vários CA com capacidade reduzida. Um aumento, por vezes ligeiro, do custo de localização resolve por si só este problema.

Por outro lado, um custo muito elevado conduz à instalação de poucos CA, possivelmente de dimensão incomportável. A limitação da capacidade dos CA que foi incluída

¹¹ São dados algo curiosos uma vez que é o próprio Perl que, para um PLD real, propõe uma relação de custos bem diferente como se anotou na secção anterior.

na definição do PLDC destina-se a evitar este contratempo.

5.4 Síntese

A revisão bibliográfica mostrou uma grande variedade de estudos sobre PLD muito diversos. Por vezes, esta dispersão torna difusa a noção de PLD, sendo difícil encontrar modelos básicos, com características bem definidas, sobre os quais seja possível efectuar estudos comparativos e melhorar procedimentos. É necessário uniformizar raciocínios e centralizar esforços em torno de um PLD de referência.

Definir fundamentadamente um PLD que possa servir de objecto de estudo foi objectivo deste capítulo. Nesse sentido, partindo de um PLD Simples com dois níveis, foi construído um PLDC equilibrado em termos de dimensão das rotas e dos CA e perfeitamente adaptado a muitas aplicações práticas. Neste processo houve sempre uma preocupação minimalista, no sentido de integrar no problema somente as características mais elementares.

Alguns argumentos que estão na base do PLDC são suportados pela necessidade de conjugar numa mesma função objectivo custos de distribuição e de localização. Muito tem sido comentado sobre a relação algo conflituosa entre estes dois tipos de custos, em especial quando têm de coabitar a mesma função como acontece no caso dos PLD. Neste capítulo foram revistos alguns estudos a este propósito. São também apresentados resultados próprios que apontam no sentido de considerar custos médios de localização e de distribuição de ordem de grandeza não muito distinta.

As sugestões sobre a relação entre os custos de localização e distribuição podem ainda ajudar os decisores a interpretar melhor os resultados obtidos e eventualmente efectuar correcções mais fundamentadas. Tendo em conta as especificidades de cada aplicação poderá ser desejável testar várias alternativas fazendo variar o custo de localização em torno de valores próximos do custo médio de distribuição. Um custo de instalação dos CA da mesma ordem de grandeza do custo médio de ligação entre dois clientes é, em geral, suficiente para promover a instalação de CA com capacidade plena.

É aconselhada a inclusão de restrições de capacidade dos CA de forma a atenuar possíveis desvios provocados por uma deficiente relativização entre os dois tipos de custos.

Capítulo 6

Modelos Matemáticos para o PLDC

6.1 Introdução

Como já foi referido nos capítulos anteriores, os estudos pioneiros sobre PLD remontam à década de 60 [147][97][210][138][46] mas, foi só em 1976, que Or [173][174] propôs a primeira formulação matemática para um PLD. Trata-se de uma formulação em termos de fluxo, com três índices, em programação não linear binária, para um PLD orientado¹.

Laporte e Nobert [132] propõem uma formulação com dois índices, em programação linear inteira, para um PLD simétrico com um CA e um número pré-definido de rotas. Pretendem conhecer a localização do CA (entre os clientes) e as rotas de distribuição que minimizam os custos de instalação dos CA e de distribuição.

Nambiar et al. [168] apresentam uma formulação com três índices mais elaborada. Propõem uma abordagem em termos de fluxo com uma matematização não linear e inteira. Consideram um sistema composto por fábricas e clientes², em que os veículos recolhem matéria prima no seu trajecto pelos clientes. Existe um número máximo de veículos com capacidade limitada. As fábricas também têm uma capacidade de laboração limitada e os clientes uma determinada oferta, tratando-se por isso de um PLD com capacidade. Devido à perecibilidade dos materiais envolvidos, o sistema incorpora ainda janelas de tempo.

Laporte et al. [135] prosseguem os estudos iniciados no artigo anterior ([132]) considerando algumas variantes do PLD. Jogando com os custos fixos nos CA, o seu número (limitado ou não) e a fixação de um determinado número de rotas por CA, apresentam

¹Problema real relacionado com a localização de bancos de sangue na zona metropolitana de Chicago e a sua distribuição pelos hospitais.

²Na verdade trata-se de um PLD relacionado com a indústria de borracha na Malásia. O sistema é composto por fábricas, estações de recolha e pequenos produtores. Pretende-se determinar a localização das fábricas e as rotas a partir das fábricas pelas estações de recolha que minimizam o custo total.

Tabela 6.1: Formulações mais significativas para os PLDC.

Formulações	PLD não orientado	PLD orientado
2 índices	Laporte et al.[134]	Laporte [127]
3 índices		Or[173],Nambiar et al.[168], Perl [178]
4 índices		Bookbinder et al.[30]

formulações com dois índices para os problemas simétricos em estudo.

Perl [176] propõe formulações com três índices que vieram a servir de base a toda a investigação subsequente nesta área. Considerou um PLD com três níveis (fábricas, CA e clientes), capacidade limitada nos veículos e CA, encomendas dos clientes e distância máxima das rotas. Tal como a formulação proposta por Nambiar, também esta é desenhada em termos de fluxo. Este trabalho foi mais tarde resumido e sistematizado num artigo [178].

Laporte et al. [134] apresentam uma formulação com dois índices para o PLD não orientado com capacidade máxima dos veículos, encomendas dos clientes e número limitado de rotas e CA. Consideram custos de distribuição, custos de instalação dos CA e custos de aquisição dos veículos. A partir desta formulação sugerem um algoritmo exacto.

Em jeito de fim de ciclo, Laporte publica dois artigos [127] [128], em tudo idênticos, em que resume os trabalhos anteriores apresentando novamente as formulações já publicadas e propondo uma formulação com dois índices, em programação linear inteira, para um PLD não orientado. Esta formulação é construída sobre uma extensão do grafo que suporta o PLD inicial.

Bookbinder e Reece [30] sugerem, com alguma inovação, uma formulação em termos de fluxo com 4 índices para um PLD orientado com 3 níveis.

Outras propostas de formulações com 3 índices se seguiram [199][102][165][206][214] mas pouco ou nada de novo acrescentaram às anteriores.

A tabela 6.1 resume as principais propostas de formulações para PLDC com 2 níveis. Laporte [128] refere que a formulação com 3 índices que apresenta para um PLDC orientado pode ser adaptada a um PLDC não orientado, considerando apenas as variáveis de distribuição correspondentes.

Com excepção do trabalho de Laporte e dos seus colaboradores, a maioria das formulações sobre PLD refere-se a aplicações algo complicadas, pouco propícias à elaboração de raciocínios acessíveis e estruturantes e, muito menos, talhadas para servirem de base a um indispensável estudo sistemático das propriedades mais básicas dos PLD. É o próprio Laporte [128] que constata a necessidade de aprofundar os conhecimentos de base sobre PLD apontando como área de investigação prioritária, o "*Development and systematic analysis of heuristics for basic types of LRPs....*". Foi, aliás, um dos seus mais importantes contributos.

Neste capítulo são apresentadas novas formulações, em programação linear inteira,

para um PLDC com 2 níveis, encomendas nos clientes e capacidade limitada dos veículos (rotas) e CA, tal como foi definido na página 104.

6.2 Fundamentos

Os problemas de Localização-Distribuição pertencem à classe dos problemas de optimização em redes e à família dos problemas de arco-nodo, uma vez que a sua solução pode ser descrita como um sub-conjunto de arcos e nodos de uma rede ou grafo [135] [92] [189]. Em linguagem matemática é comum representar um grafo por $G = (V, A)$ em que $V = \{1, \dots, v\}$ representa um conjunto de nodos e $A = \{(i, j) : i, j \in V\}$ um conjunto de arcos entre os nodos de V^3 . Em Gondran e Minoux [94] é possível encontrar um estudo completo sobre Grafos.

Tal como tem sido afirmado ao longo deste trabalho, o PLD surge como combinação de dois outros problemas, o Problema do Caixeiro Viajante (PCV) e o Problema de Localização-Afectação (PLA). A generalidade das formulações matemáticas para PLD integram, com algumas alterações, os conceitos relacionados com as formulações clássicas destes problemas. Por este motivo, é oportuno preceder a apresentação de formulações para o PLD de um estudo breve sobre as formulações para o PCV e PLA (para o caso simétrico). Desta forma facilita-se uma gradual absorção dos princípios que estão na base da construção das subsequentes formulações para o PLDC.

6.2.1 Problema do Caixeiro Viajante

O Problema do Caixeiro Viajante [137] (PCV) é, sem sombra de dúvida, o problema mais estudado da análise combinatória ao longo da segunda metade do século XX⁴.

O PCV deve grande parte do seu sucesso à facilidade com que é compreendido pelo cidadão comum. No entanto, a sua extrema simplicidade de definição contrasta com a enorme dificuldade de resolução, resistindo com firmeza às inúmeras tentativas de construção de algoritmos eficientes. Hoje, sabe-se que se trata de um problema NP-completo e, como tal, já não é uma surpresa que as buscas de algoritmos eficientes tenham sido infrutíferas. Segue-se uma breve introdução à definição e formulação matemática do PCV, tendo em conta a estreita relação que mantém com o PLD.

Definição 8

Encontrar a rota de menor custo que permita a visita a todos os clientes de uma rede passando uma só vez por cada cliente é o objectivo a alcançar com a resolução do Problema do Caixeiro Viajante.

³Se nada for dito em contrário, a designação "grafo" refere-se a um grafo finito, euclidiano e sem lacetes.

⁴No endereço da *Internet*, <http://www.math.princeton.edu/tsp/index.html>, é possível encontrar informação completa sobre o PCV (confirmado em 05 de Fevereiro de 2004).

O PCV simétrico assim definido pode ser formalizado matematicamente em programação linear binária considerando os dados N , c_{ij} e as variáveis x_{ij} tal como definidas na secção 5.2.1 (p. 97). Considera-se em N a existência de, pelo menos, 3 elementos (clientes).

(PCV)

$$\text{Min } Z = \sum_{i,j \in N, i < j} c_{ij}x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in N, i < g} x_{ig} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gj} = 2 \quad , (g \in N) \quad (6.1)$$

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad , (S \subset N, 3 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \quad (6.2)$$

$$x_{ij} = \{0, 1\} \quad , (i, j \in N, i < j) \quad (6.3)$$

A função objectivo representa o custo⁵ total do percurso do caixeiro viajante.

As restrições (6.1) estabelecem que cada cliente é visitado exactamente uma vez (tendo em conta as restrições (6.3)). Em linguagem da Teoria dos Grafos [94] (p. 4) diz-se que cada nodo (cliente) admite grau 2 quando é tocado por duas arestas.

As restrições (6.2), devem-se a Dantzig et al. [54] e impedem a formação de sub-ciclos que não contenham todos os clientes.

As restrições (6.3) estabelecem o valor nulo para as arestas não pertencentes à solução e o valor um no caso de fazerem parte da solução.

Nas restrições (6.2) considera-se apenas necessário confirmar a inexistência de sub-ciclos em sub-conjuntos S de N , tais que $3 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. O teorema seguinte mostra porquê.

Teorema 3

Considere-se o Problema do Caixeiro Viajante tal como ilustra a formalização (PCV). A não existência de sub-ciclos em qualquer sub-conjunto $S : S \subset N, 3 \leq |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ garante a não existência de sub-ciclos em N .

Prova.

As restrições de grau 2 (6.1) e de binariedade (6.2), não permitem a existência de sub-ciclos com menos de três nodos, confirmando que é suficiente tomar $S : S \subset N, 3 \leq |S|$.

⁵Se o custo for de uma unidade monetária por cada unidade de comprimento a função objectivo traduzirá o valor da distância percorrida pelo caixeiro viajante.

Suponhamos, por absurdo, que existe um sub-ciclo cujos nodos pertencem a $S : S \subset N, |S| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Devido às restrições de grau e de integralidade, os nodos de $\bar{S} = N - S$ têm obrigatoriamente de se agrupar em sub-ciclos. Sendo assim, existe um sub-conjunto $\bar{S} : \bar{S} \subset N, |\bar{S}| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ contendo sub-ciclos o que contraria a hipótese de não existência de ciclos desta dimensão e consequentemente confirma o teorema.

A demonstração de teoremas por redução ao absurdo, apesar de muito comum, é uma forma algo "absurda" de expor matemática simples. Senão vejamos.

O que se deseja provar na segunda metade desta demonstração é que:

\nexists sub-ciclos em $S : S \subset N, |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow \nexists$ sub-ciclos em N

ou, de forma equivalente,

\nexists sub-ciclos em $S : S \subset N, |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow \nexists$ sub-ciclos em $T : T \subset N, |T| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

ou ainda, usando a lei da conversão,

\exists sub-ciclos em $T : T \subset N, |T| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Rightarrow \exists$ sub-ciclos em $S : S \subset N, |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

A prova desta última implicação é equivalente à prova da primeira.

Considere-se então a existência de um sub-ciclo em $T : T \subset N, |T| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Devido às restrições de grau e de integralidade, os nodos de $S = N - T$ têm obrigatoriamente de se agrupar em sub-ciclos. Como $S \subset N \wedge |S| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a implicação é verdadeira. ■

A relaxação das restrições (6.2) conduz à obtenção de um Problema de Afectação. Uma via possível para a construção de um algoritmo de resolução do PCV consiste em resolver o Problema de Afectação que lhe está associado e só depois introduzir as restrições de sub-ciclos que forem sendo violadas. É do conhecimento dos investigadores [20][191] que a relaxação das restrições (6.2) propicia a formação de muitos sub-ciclos com reduzido número de nodos (neste caso com três nodos). Estes sub-ciclos são eliminados com recurso a um grande número de restrições do tipo (6.2), o que torna extremamente pesada a resolução do problema. Sendo assim, é desejável eliminar à partida os sub-ciclos de menor dimensão integrando no problema relaxado algumas destas restrições.

6.2.2 Problema de Localização-Afectação

A par com o PCV, o Problema de Localização-Afectação [159] (PLA) encontra-se entre os mais simples e comuns da Investigação Operacional. Contudo, é também um problema de muito difícil resolução, já caracterizado como sendo NP-completo.

Definição 9

Determinar a localização dos CA, entre os potenciais candidatos, e a afectação dos clientes aos CA de forma a minimizar o custo total, contabilizado pela soma do custo de instalação dos CA com o custo de ligação dos clientes aos CA, é o objectivo do Problema de Localização-Afectação.

Está implícito na definição anterior, mas é sempre oportuno salientar, que se trata de um PLA discreto, isto é, os potenciais CA têm localização conhecida à *priori*. Para facilitar desde já a compreensão das futuras formulações para o PLD, considera-se que cada cliente é servido na totalidade por um único CA.

O PLA simétrico assim definido pode ser formalizado matematicamente em programação linear binária considerando os dados N , P , c_{ij} , f_k e as variáveis x_{ij} , y_k tal como definidas na secção 5.2.1 (p. 97). Considere-se ainda que $f_k > 0$, ($k \in P$).

(PLA)

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in P} x_{ik} = 1, (i \in N) \quad (6.4)$$

$$x_{ik} \leq y_k, (i \in N, k \in P) \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} x_{ik} &\in \{0, 1\}, (i \in N; k \in P) \\ y_k &\geq 0, (k \in P) \end{aligned} \quad (6.6)$$

A função objectivo representa o custo total contabilizado pela soma dos custos de instalação dos CA com os custos da ligação entre os clientes e os CA a que ficarão afectos.

As restrições (6.4), em conjunto com as (6.6) impõem que cada cliente seja afecto a um e um só CA. Se fosse admitida a continuidade das variáveis x_{ik} , as mesmas restrições impunham igualmente o serviço a todos os clientes mas, eventualmente, por mais do que um CA.

As restrições (6.5) garantem que apenas CA com clientes afectos serão abertos. Estas restrições fazem a ligação entre as variáveis de distribuição x_{ik} e as de localização y_k .

As restrições (6.6) são de interpretação imediata.

Embora nas restrições (6.6) as variáveis y_k sejam contínuas, o seu valor será binário em qualquer solução. Sendo $f_k > 0$, a função objectivo pressiona y_k no sentido descendente, acompanhando os valores binários de x_{ik} , devido às restrições (6.5).

6.2.3 Problema de Localização-Afectação com Capacidade

Relevante para os capítulos que se seguem é a consideração de CA com capacidade limitada. Atribuindo uma encomenda a cada cliente, é possível limitar o número de clientes afectos a cada CA aberto, de forma a que não excedam um determinado limite de capacidade. Cada cliente admite um único CA como fornecedor [105].

Considerem-se as mesmas variáveis e os mesmos dados já definidos na página 97 e acrescentem-se os conjuntos:

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, representativo das encomendas dos clientes (em unidades de carga),

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, representativo da capacidade dos CA (em unidades de carga),

O PLA com capacidade (PLAC) pode então ser formalizado como se segue.

(PLAC)

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a

$$\sum_{k \in P} x_{ik} = 1 \quad , (i \in N) \quad (6.7)$$

$$\sum_{i \in N} e_i x_{ik} \leq u_k y_k \quad , (k \in K) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} x_{ik} &\in \{0, 1\} & , (i \in N; k \in P) \\ y_k &\in \{0, 1\} & , (k \in P) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Esta formulação é idêntica à anterior, com algumas pequenas diferenças que importa assinalar.

As restrições (6.8) actuam agora em dois sentidos. Continuam a efectuar uma interligação entre as variáveis de distribuição e as de localização, garantindo a abertura de um CA se este tiver clientes afectos mas, ao mesmo tempo, limitam o número de clientes afectos a um CA tendo em conta a sua capacidade. É de salientar que as restrições (6.8) surgem agora em menor número. Em contrapartida, as variáveis de localização y_k deixam de alcançar a binariedade automaticamente (perde-se a propriedade da integralidade), tendo esta de ser imposta.

6.3 Formulações para o PLD com Capacidade

Como já foi afirmado, as formulações para o PLD dividem-se habitualmente segundo o número de índices das suas variáveis. Assim, existem formulações com 2, 3 e mesmo 4 índices (tabela 6.1).

As formulações com 2 índices são concisas e envolvem um reduzido número de variáveis, especialmente no caso simétrico. No entanto, não sendo possível identificar o percurso e os clientes de uma determinada rota, não permitem um controlo sobre as características da rota. Como consequência, são aplicáveis somente no caso de frotas homogêneas.

As formulações com 3 índices são mais versáteis, em termos de construção, tornando mais fácil a intervenção sobre as características de cada rota. Mas, nem tudo são vantagens, com um número exorbitante de variáveis, são muito mais pesadas em termos de resolução. Laporte [127] afirma não conhecer uma formulação com 3 índices que tenha conduzido a um algoritmo exacto eficiente.

Os PLD podem ser orientados, no caso de os percursos obedecerem a um sentido, ou não orientados, no caso contrário. Neste trabalho são apresentadas formulações com 2 e 3 índices para o Problema de Localização-Distribuição com Capacidade (PLDC) com dois níveis, orientado e não orientado, tal como proposto na definição 7 (p. 104).

O tipo de PLDC formulado é indicado pela designação

$$PLDC.(número\ de\ índices).(orientado\ /\ não\ orientado).$$

Por exemplo, *PLDC.2i.no* refere-se a um PLDC com 2 índices não orientado.

Tendo em conta que se trata de propor formulações distintas para o mesmo problema, os dados são sempre os mesmos e como tal definem-se de imediato. Embora a maior parte dos dados tenham sido já apresentados, voltam a ser agrupados para facilitar a consulta.

$N = \{1, 2, \dots, n\}$, representa n clientes no plano,

$P = \{n + 1, n + 2, \dots, n + p\}$, representa p potenciais CA no mesmo plano,

$R = \{1, 2, \dots, r\}$, representa r potenciais rotas ou veículos (formulações com 3 índices),

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, representa as encomendas dos clientes (em unidades de carga),

$U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$, representa a capacidade dos CA (em unidades de carga),

w = capacidade dos veículos (em unidades de carga),

c_{ij} = custo associado à ligação entre os clientes $i, j \in N$ (em unidades monetárias),

c_{ik} = custo associado à ligação entre o cliente $i \in N$ e o CA $k \in P$ (em unidades monetárias),

f_k = custo associado à instalação do CA $k \in P$ (em unidades monetárias).

A fim de tornar mais compreensíveis as formulações que se seguem, identificar com maior clareza os conjuntos envolvidos e facilitar a comparação entre as várias formulações, estipulou-se à partida quais os índices referentes a cada conjunto. A tabela 6.2 ilustra esta relação.

Tabela 6.2: Índices em cada conjunto.

Conjunto	Índices
N (Clientes)	i, j, g
P (Potenciais CA)	k
R (Potenciais Rotas)	l

As variáveis serão definidas caso a caso, uma vez que dependem do tipo de formulação.

Cada formulação persegue um compromisso entre a necessária simplicidade teórica (quase sempre minimalista) e a procura da funcionalidade prática (frequentemente complicativa). Em alguns casos, à custa de alguma eficácia prática é possível construir formulações mais compactas, com menor número de variáveis. Essa nem sempre foi a via seguida; em cada caso serão convenientemente fundamentadas as opções tomadas.

Seguem-se as quatro formulações em programação linear inteira para o PLDC.

6.3.1 Formulações com 2 Índices

PLDC não Orientado

A formulação que se apresenta nesta secção, apesar de próxima, em alguns passos, das formulações propostas por Laporte et al. [134], assume uma identidade própria, não só porque segue todo um raciocínio original e uma filosofia de construção autónoma, mas também porque se destina a representar matematicamente um PLDC distinto dos PLD formalizados por Laporte et al..

Definição das variáveis decisão.

x_{ij} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o cliente j

x_{ik} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o CA k

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se o CA é instalado em } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição das variáveis auxiliares.

z_k = número de rotas (veículos) apoiadas no CA k .

(PLDC.2i.no)

$$\text{Min } Z = \sum_{i,j \in N, i < j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} c_{ik}x_{ik} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in N, i < g} x_{ig} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gj} + \sum_{k \in P} x_{gk} = 2 \quad , (g \in N) \quad (6.10)$$

$$z_k \leq \frac{u_k}{w} y_k \quad , (k \in P) \quad (6.11)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ik} = 2z_k \quad , (k \in P) \quad (6.12)$$

$$\sum_{k \in P} z_k \geq \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w} \quad (6.13)$$

$$x_{i_1 i_2} + 3x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_4} \leq 4 \quad , (i_1, i_4 \in P; i_2, i_3 \in N) \quad (6.14)$$

$$x_{i_1 i_2} + 2 \sum_{i,j \in \{i_2, \dots, i_{h-1}\}} x_{ij} + x_{i_{h-1} i_h} \leq 2h - 5 \quad , (h \geq 5; i_1, i_h \in P; i_2, \dots, i_{h-1} \in N) \quad (6.15)$$

$$\sum_{i,j \in S, i < j} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} e_i}{w} \right\rceil \quad , (S \subset N, 3 \leq |S| \leq |N| - 3) \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \{0, 1\} & , (i, j \in N, i < j) \\ x_{ik} &\in \{0, 1, 2\} & , (i \in N; k \in P) \\ y_k &\in \{0, 1\} & , (k \in P) \\ z_k &\in \mathbb{Z}_0^+ & , (k \in P) \end{aligned} \quad (6.17)$$

A função objectivo representa o custo total do PLDC, traduzido pela soma do custo da distribuição com o custo de instalação dos CA.

As restrições (6.10), em face da binariedade das variáveis de distribuição, determinam que o grau de cada cliente é 2, ou seja é visitado uma e uma só vez.

Sempre que um CA é visitado por um veículo, as restrições (6.11) activam esse CA e ao mesmo tempo cuidam que este não exceda o seu limite de capacidade. É de notar que $\frac{u_k}{w}$ indica o número máximo de rotas (veículos) que pode ser suportado pelo CA k . Nas formulações com 2 índices não há uma identificação dos clientes com a rota e por conseguinte também não é possível relacioná-los com os respectivos CA. Desconhecendo quais os clientes afectos a um determinado CA, torna-se difícil cumprir as suas restrições de capacidade em termos das encomendas dos clientes. Em vez disso, é limitado o número de veículos (rotas) apoiados num CA, uma solução que, não sendo ideal, é tão só a possível.

Devido à integralidade das variáveis z , as restrições (6.12) atribuem grau par a cada CA, significa isto que o número de veículos que entram no CA k é igual ao número de

veículos que saem do mesmo CA. Apesar de não ser suficiente para impor que um determinado veículo volte ao CA de partida, eliminando totalmente as cadeias entre CA, serve contudo para reduzir significativamente o seu número. Mais adiante este raciocínio será exposto com mais detalhe.

Em conjunto, as restrições (6.11) e (6.12) estabelecem a ligação entre as variáveis de localização e as de distribuição.

As restrições (6.13) estabelecem o número mínimo de rotas apoiadas nos CA.

É sempre possível substituir uma cadeia com um cliente por uma rota com custo não superior que integra esse cliente e um dos CA [134]. Este procedimento funciona somente sob a hipótese de $x_{ik} \in \{0, 1, 2\}, i \in N, k \in P$. Se estas variáveis fossem binárias ficaria impossibilitada a construção de rotas com um único cliente⁶ e não seria possível a substituição de uma cadeia com um cliente pela rota mais económica.

As restrições (6.14) e (6.15), propostas por Laporte et al. [134], impedem a formação de cadeias com 2 clientes e com mais de 2 clientes entre CA, respectivamente.

Impedir a formação de rotas sem CA ou com encomendas superiores a w (rotas ilegais) é o objectivo das restrições (6.16).

As restrições (6.17) estabelecem a binariedade ou integralidade das variáveis.

O número de restrições de eliminação de cadeias e rotas ilegais (6.14), (6.15), (6.16) é exponencial, impedindo a resolução directa de problemas de média e grande dimensão. O conjunto das partes de um conjunto com n elementos possui 2^n elementos, o que dá uma ideia da enorme quantidade de restrições do tipo (6.16), mesmo para problemas de pequena dimensão.

O número de variáveis nesta formulação é dado por $\frac{1}{2}n(n-1) + np + 2p$.

Em termos práticos, por vezes é desejável a introdução de restrições que, não sendo indispensáveis, podem tornar mais eficaz a resolução do problema [58] (p. 276). Como já foi referido as restrições (6.14), (6.15) e (6.16) surgem em número bastante elevado, sendo responsáveis pela dificuldade de resolução dos PLDC. Serão bem-vindas algumas restrições que, embora dispensáveis do ponto de vista teórico, diminuam a necessidade de recorrer às restrições de eliminação de cadeias e sub-ciclos ilegais.

Em teoria, as restrições (6.11), (6.12) e (6.13) podem ser substituídas pelas restrições

$$\sum_{i \in N} x_{ik} \leq 2 \left\lfloor \frac{u_k}{w} \right\rfloor y_k, (k \in P) \quad (6.18)$$

Em menor número e tornando dispensáveis as variáveis auxiliares z_k parece que são a chave para uma formulação de sucesso. Na prática, esta "simplificação" é pouco aconselhável. A formulação ficaria enfraquecida pois a ligação dos clientes aos CA teria de ser conseguida à custa de restrições do tipo (6.16). Este contratempo é fácil de

⁶Tendo em conta que se trata de um PLD não orientado.

ultrapassar, bastando para isso juntar às restrições (6.18) a restrição

$$\sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} x_{ik} \geq 2 \left\lceil \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w} \right\rceil \quad (6.19)$$

que impõe um número mínimo de clientes ligados aos CA.

A substituição das restrições (6.11), (6.12) e (6.13) pelas restrições (6.18) e (6.19) traz ainda outro inconveniente, desta feita mais pertinente. A não imposição directa de grau par em cada CA aberto (conforme as restrições (6.12)) potencia a formação de cadeias entre CA (ver exemplo 10) que, por sua vez, serão eliminadas com recurso às numerosas restrições (6.14) e (6.15). A principal vantagem da introdução das variáveis auxiliares z_k é garantir um número par de arestas em cada CA aberto. Existindo, são também usadas para obrigar à abertura dos CA necessários e à sua ligação às rotas mas isso poderia ser alcançado sem a sua presença.

A eliminação das restrições (6.13) na formulação (*PLDC.2i.no*) não acarreta qualquer prejuízo teórico mas, também neste caso, a ligação das rotas aos CA estaria a cargo das penosas restrições (6.16).

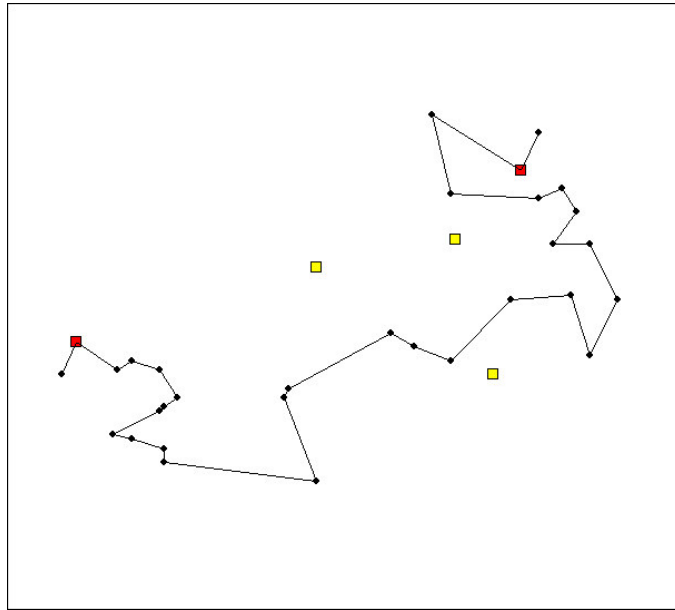
Além das razões práticas que sustentam o uso das variáveis auxiliares z_k existe também a convicção de que a formulação se torna mais funcional e compreensível.

Exemplo 10

*Recorrendo à relaxação das restrições (6.14), (6.15) e (6.16) na formulação (*PLDC.2i.no*) é possível ensaiar a resolução de uma instância simples de forma a identificar as vantagens da inclusão da variável auxiliar z_k . Considere-se uma instância do PLDC com 29 clientes e 5 potenciais CA, construída com base nos ficheiros de dados *Gaskell67Cli29x5* e *Gaskell67CA29x5* (ver apêndice A, p. 229). Para resolver a instância são relaxadas as restrições (6.14), (6.15) e (6.16), introduzidas em iterações subsequentes à medida que são violadas.*

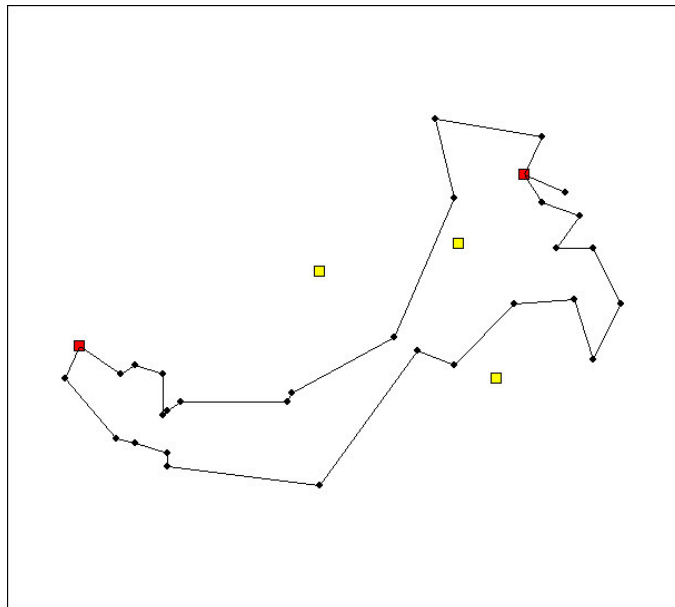
Para avaliar o impacto da introdução das variáveis z_k a instância é resolvida usando duas formulações alternativos, com e sem variáveis auxiliares. Para isso são consideradas duas formulações usando em alternativa os blocos de restrições (6.18) (6.19) e (6.11) (6.12) (6.13).

Após 6 iterações com a primeira formulação (sem z_k) surge a solução não admissível que a figura seguinte retrata. É a primeira solução não admissível que contempla uma cadeia entre CA (nas iterações anteriores apenas figuram sub-rotas sem CA ou com excesso de capacidade que foram sendo eliminadas). Uma observação mais atenta mostra que o grau dos CA é ímpar em ambos os casos. Será de esperar que a imposição de grau par nos CA conduza à eliminação deste tipo de cadeias e facilite a resolução.



Considerando agora a segunda formulação (com z_k), que impõe grau par nos CA, é possível verificar (figura seguinte) que as primeiras cadeias surgem apenas na 51ª iteração.

Na verdade, só foi possível resolver esta e outras instâncias do PLD recorrendo à variável auxiliar z_k [15].



As restrições de eliminação de rotas ilegais (6.16) podem ser substituídas por uma generalização das restrições de conectividade propostas por Dantzig et al. [54].

$$\sum_{i \in S, j \in \bar{S} \cup P, i < j} x_{ij} + \sum_{i \in S, j \in \bar{S} \cup P, i > j} x_{ji} \geq 2 \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} e_i}{w} \right\rceil \quad (6.20)$$

Desta vez, a rota indesejada não é eliminada por "destruição" de alguma/s ligação/s interna, como acontece com as restrições (6.16), mas sim pela obrigação de se conectar com o exterior. É um princípio de actuação algo diferente que Bellmore e Malone [20] definem como *more effective*. Alguns estudos baseados em testes computacionais permitem apenas concluir que influenciam de forma distinta a resolução de PLDC e o número e tipo de percursos ilegais que vão surgindo [15]. Não foi possível concluir pela vantagem do uso de qualquer das restrições, (6.16) ou (6.20), no sentido de potenciar a resolução dos PLDC testados.

PLDC Orientado

Nesta secção é apresentada uma proposta de formalização matemática com dois índices para um PLDC orientado.

No caso orientado é simples garantir que o número de arcos que entram num CA seja igual ao número de arcos que saem. Por este motivo não há razão para considerar agora as variáveis auxiliares z_k . Apesar disso, se o leitor desejar, pode introduzi-las sem outras implicações práticas que não seja a existência de mais algumas (poucas) variáveis no modelo.

Definição das variáveis decisão.

x_{ij} = número de vezes que é usada a ligação do cliente i para o cliente j

x_{ik} = número de vezes que é usada a ligação do cliente i para o CA k

x_{ki} = número de vezes que é usada a ligação do CA k para o cliente i

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se o CA é instalado em } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(PLDC.2i.o)

$$\text{Min } Z = \sum_{i,j \in N, i \neq j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} (c_{ik}x_{ik} + c_{ki}x_{ki}) + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, (i \in N) \quad (6.21)$$

$$\sum_{i \in N \cup P} x_{ij} - \sum_{i \in N \cup P} x_{ji} = 0, (j \in N \cup P) \quad (6.22)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ik} \leq \frac{u_k}{w} y_k, (k \in P) \quad (6.23)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} x_{ik} \geq \frac{\sum_{i \in S} e_i}{w}, (k \in P) \quad (6.24)$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} + 3(x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_2}) + x_{i_3 i_4} + x_{i_4 i_3} \leq 4, (i_1, i_4 \in P; i_2, i_3 \in N) \quad (6.25)$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} + 2 \sum_{i,j \in \{i_2, \dots, i_{h-1}\}} x_{ij} + x_{i_{h-1} i_h} + x_{i_h i_{h-1}} \leq 2h - 5, (h \geq 5; i_1, i_h \in P; i_2, \dots, i_{h-1} \in N) \quad (6.26)$$

$$\sum_{i,j \in S, i \neq j} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} e_i}{w} \right\rceil, (S \subset N, 2 \leq |S| \leq |N| - 2) \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &\in \{0, 1\}, (i, j \in N, i \neq j) \\ x_{ik}, x_{ki} &\in \{0, 1\}, (i \in N; k \in P) \\ y_k &\in \{0, 1\}, (k \in P) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ao impor a saída de um arco de cada cliente, as restrições (6.21) estabelecem que todo o cliente é visitado. Em conjunto com as anteriores, as restrições (6.22) garantem grau 2 em cada cliente (arco de entrada e arco de saída) e grau par nos CA, dispensando o fortalecimento alcançado com as variáveis auxiliares z_k .

As restrições (6.23), tal como se indicou na formulação (PLD.2i.no), fazem a ligação entre as variáveis de distribuição e de localização, instalam CA que recebem visitas de veículos e cumprem a capacidade dos CA limitando o número de veículos que suportam.

As restrições (6.24) determinam que o número de arcos entre os clientes e os CA é igual ou superior ao número mínimo de veículos. Juntamente com as restrições (6.21) impõem grau par aos CA.

As restantes restrições têm significado idêntico ao das suas congêneres da formulação (PLD.2i.no).

Tal como no caso anterior, o número exponencial das restrições (6.25), (6.26) e (6.27) torna inviável a resolução de problemas de média e grande dimensão a partir

desta formulação.

O número de variáveis é dado por $n(n-1) + 2np + p$.

6.3.2 Formulações com 3 Índices

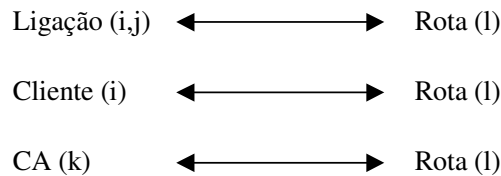
Nas formulações com dois índices não é possível identificar cada ligação com a rota a que pertence. Por este motivo, a eliminação de rotas com excesso de capacidade faz-se com recurso às indesejáveis restrições de sub-ciclos. Nas formulações com 3 índices essa identificação é imediata. Sendo possível relacionar as ligações (arcos) e consequentemente os clientes com a rota a que pertencem fica facilitado o cumprimento das restrições de capacidade dos veículos.

Na página 123 foram definidos vários conjuntos de dados. Um deles, $R = \{1, 2, \dots, r\}$, representa r potenciais rotas ou veículos e contém informação apenas utilizada nas formulações com 3 índices.

O facto de $|R| = r$ não significa que sejam criadas r rotas mas apenas que r é um majorante do número de rotas. Ao modelo é dada a liberdade para determinar o número de rotas que minimiza o custo total. Sendo assim, R deve ser constituído por um número suficiente de potenciais rotas que permitam servir todos os clientes respeitando os limites de capacidade dos veículos, caso contrário, pode ser criada uma situação de não existência de solução admissível. Por outro lado, é necessário tomar precauções para não exagerar o número de potenciais rotas, aumentando desnecessariamente o número de variáveis e inviabilizando a resolução do problema.

PLDC não Orientado

Aproveitando a definição de um conjunto R de potenciais rotas, é possível estabelecer uma relação entre cada arco, cliente ou CA com a rota a que pertencem. A representação esquemática que se segue ilustra esta relação.



Definição das variáveis de decisão.

x_{ijl} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o cliente j na rota l

x_{ikl} = número de vezes que é usada a ligação entre o cliente i e o CA k na rota l

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se o CA é instalado em } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição das variáveis auxiliares.

$$t_{il} = \begin{cases} 1 & \text{se o cliente } i \text{ é servido pelo veículo } l \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{se o CA } k \text{ suporta o veículo } l \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(PLDC.3i.no)

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i,j \in N, i < j \\ l \in R}} c_{ij} x_{ijl} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P \\ l \in R}} c_{ik} x_{ikl} + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a:

$$\sum_{l \in R} t_{il} = 1, \quad i \in N \quad (6.29)$$

$$\sum_{i \in N, i < g} x_{igl} + \sum_{j \in N, g < j} x_{gjl} + \sum_{k \in P} x_{gkl} = 2t_{gl}, \quad (g \in N; l \in R) \quad (6.30)$$

$$\sum_{l \in R} z_{kl} \leq \frac{u_k}{w} y_k, \quad (k \in P) \quad (6.31)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ikl} = 2z_{kl}, \quad (k \in P; l \in R) \quad (6.32)$$

$$\sum_{\substack{k \in P \\ l \in R}} z_{kl} \geq \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w} \quad (6.33)$$

$$\sum_{i \in N} e_i t_{il} \leq w, \quad (l \in R) \quad (6.34)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in S, i < j \\ l \in R}} x_{ijl} \leq |S| - 1, \quad (S \subset N, 3 \leq |S| \leq |N| - 3) \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} x_{ijl} &\in \{0, 1\} && , (i, j \in N, i < j; l \in R) \\ x_{ikl} &\geq 0 && , (i \in N; k \in P; l \in R) \\ y_k &\in \{0, 1\} && , (k \in P) \\ t_{il} &\in \{0, 1\} && , (i \in N; l \in R) \\ z_{kl} &\in \{0, 1\} && , (k \in P; l \in R) \end{aligned} \quad (6.36)$$

As restrições (6.29) garantem que cada cliente pertence a uma e uma só rota (é servido por um único veículo).

Já as restrições (6.30) estabelecem o grau 2 para cada cliente na sua rota. Em conjunto, as restrições (6.29) e (6.30) obrigam os clientes servidos por um determinado veículo a agruparem-se numa só rota (ou sub-rotas dessa rota).

Quando um CA serve de apoio a um veículo (rota), as restrições (6.31) impõem a sua abertura e zelam para que não exceda a sua capacidade. Sem acrescentar novas

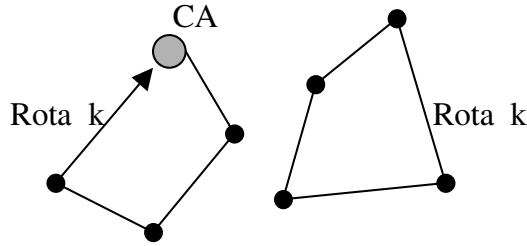


Figura 6.1: Rota cumprindo todas as restrições excepto as de eliminação de sub-rotas.

variáveis não é possível relacionar linearmente os clientes com os CA. Sendo assim, também nas formulações com três índices a capacidade dos CA não é verificada com base nas encomendas dos clientes mas sim no número de rotas que lhe estão afectas.

As restrições (6.32) garantem a ligação de cada rota a um CA por dois arcos, evitando as indesejáveis cadeias entre CA. Em conjunto com as anteriores fazem a ligação entre as variáveis de localização e de distribuição. A principal vantagem da introdução das variáveis z_{kl} é mesmo a sua utilidade na eliminação de cadeias entre CA.

As restrições (6.33) impõem um número mínimo de veículos (rotas). A formulação continua viável se estas restrições forem eliminadas. No entanto, se assim acontecer, admite-se que todas as variáveis z_{kl} são nulas e inviabiliza-se o poder de actuação das restrições (6.31) e (6.32), surgindo muitas sub-rotas sem CA que têm de ser eliminadas à custa das numerosas restrições (6.35).

O limite de capacidade dos veículos é observado pelas restrições (6.33). Tal como nas formulações com 2 índices, as restrições de sub-rotas (6.35) poderiam cumprir este propósito, contudo, a facilidade que agora existe em aceder aos clientes de uma rota (através das variáveis t_{il}) motiva a existência de restrições específicas para o efeito. Além disso, é desejável fortalecer o mais possível a relaxação das restrições (6.35) e desta forma potenciar a resolução do problema.

As restrições (6.35) eliminam sub-rotas entre os clientes. Surgem em número exponencial e são responsáveis pela dificuldade de resolução dos problemas. A figura 6.1 ilustra um possível caso de aplicação destas restrições.

As restrições (6.36) são de interpretação imediata. A binariedade das variáveis x_{ikl} é assegurada pelas restrições (6.29), (6.30), (6.32) e pela binariedade das restantes variáveis. Na verdade, bastaria também tomar as variáveis t_{il} e z_{kl} como sendo inteiras, na certeza de que a sua binariedade seria imposta pelas restrições e restantes variáveis.

O número de variáveis é dado por $(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + np + p)r + p$.

PLDC Orientado

Definição das variáveis decisão.

x_{ijl} = número de vezes que é usada a ligação do cliente i para o cliente j na rota l

x_{ikl} = número de vezes que é usada a ligação do cliente i para o CA k na rota l

x_{kil} = número de vezes que é usada a ligação do CA k para o cliente i na rota l

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{se o CA é instalado em } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(PLDC.3i.o)

$$\text{Min } Z = \sum_{\substack{i,j \in N, i \neq j \\ l \in R}} c_{ij} x_{ijl} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P \\ l \in R}} (c_{ik} x_{ikl} + c_{ki} x_{kil}) + \sum_{k \in P} f_k y_k$$

sujeito a

$$\sum_{\substack{j \in N \cup P \\ l \in R}} x_{ijl} = 1, (i \in N) \quad (6.37)$$

$$\sum_{i \in N \cup P} x_{igl} - \sum_{j \in N \cup P} x_{gjl} = 0, (g \in N \cup P; l \in R) \quad (6.38)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ l \in R}} x_{ikl} \leq \frac{u_k}{w} y_k, (k \in P) \quad (6.39)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ k \in P \\ l \in R}} x_{ikl} \geq \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w} \quad (6.40)$$

$$\sum_{i,j \in N, i \neq j} e_i x_{ijl} + \sum_{\substack{i \in N \\ k \in P}} e_i x_{ikl} \leq w, (l \in R) \quad (6.41)$$

$$\sum_{\substack{i,j \in S, i \neq j \\ l \in R}} x_{ijl} \leq |S| - 1, (S \subset N, 2 \leq |S| \leq |N| - 2) \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} x_{ijl} &\in \{0, 1\}, (i, j \in N, i \neq j; l \in R) \\ x_{ikl}, x_{kil} &\in \{0, 1\}, (i \in N; k \in P; l \in R) \\ y_k &\in \{0, 1\}, (k \in P) \end{aligned} \quad (6.43)$$

As restrições (6.38) estabelecem que cada cliente é visitado uma só vez numa só rota.

As restrições (6.37) garantem que, em determinada rota, a existência de um arco de entrada num determinado nodo (cliente ou CA) pressupõe também a existência de um arco de saída. Garantindo que cada rota entra e sai do mesmo CA eliminam a possibilidade de constituição de cadeias entre CA. Em conjunto, as restrições (6.37) e (6.38), garantem que os clientes de um determinado circuito pertencem todos à mesma rota afecta a um só CA. É de salientar que estas restrições tornam dispensáveis as

variáveis auxiliares z_{il} , utilizadas no caso não orientado precisamente para garantirem que todos os clientes de um circuito pertenciam à mesma rota.

Efectuando a ligação entre as variáveis de distribuição e as de localização, as restrições (6.39) determinam a instalação de um CA sempre que recebe a visita de um veículo. Além disso, garantem que o CA instalado não ultrapassa a sua capacidade, em termos de número de rotas.

A restrição (6.40) estabelece um número mínimo ligações aos CA. Tal como nos casos anteriores, esta restrição pode ser eliminada sendo garantida a ligação das rotas aos CA pelas indesejáveis restrições (6.42).

O limite de capacidade dos veículos é assegurado pelas restrições (6.41). A não existência das variáveis t_{il} não é um embraço, sendo que, ao contrário do caso não orientado, é agora possível aceder aos clientes de uma rota através das variáveis de distribuição x .

As restrições (6.42) eliminam sub-rotas entre os clientes. Mais uma vez contribuem exponencialmente para o número de restrições.

As restrições (6.43) estabelecem a binariedade das variáveis.

O número de variáveis é dado por $(n^2 - n + 2np)r + p$.

A elaboração de formulações apenas com base em pressupostos teóricos corre o risco de cometer alguns erros ou omitir pormenores. Sendo assim, as formulações propostas foram construídas com base numa metodologia de experimentação, visualização e avaliação de resultados. São o resultado depurado de muitas experiências, combinando vários tipos de restrições e avaliando as consequências de cada uma delas. Este método permitiu detectar imperfeições, colmatar lacunas, simplificar redundâncias que, de outra forma, poderiam ter passado despercebidas. Além disso, foi possível entender como actua cada restrição, de forma isolada, ou em conjunto com as restantes, procedendo a uma construção degrau a degrau de cada formulação.

No sentido de comprovar a eficácia e fiabilidade do resultado final cada uma das formulações foi testada sobre vários PLDC relaxando, em cada formulação, as restrições mais numerosas⁷.

No caso das formulações com dois índices as restrições relaxadas foram as de eliminação de cadeias e de sub-ciclos. Para as formulações com 3 índices foram relaxadas somente as restrições de sub-ciclos. Foi possível resolver relaxações com assinalável dimensão em tempo aceitável (em menos de 1 minuto), indicando a tabela 6.3 alguns dados a este respeito⁸.

⁷No próximo capítulo será explanado com detalhe um método de resolução exacta de PLDC a partir da formulação (*PLDC.2i.no*).

⁸Os recursos de *hardware* e *software* são os mesmos já indicados na página 113.

Tabela 6.3: Dimensão das relaxações do PLDC resolvidas.

Problema	Restrições Relaxadas	Dimensão		
		N	P	R
<i>PLDC.2i.no</i>	Cadeias e sub-ciclos	100	20	—
<i>PLDC.2i.o</i>	Caminhos e sub-circuitos	50	20	—
<i>PLDC.3i.no</i>	Sub-ciclos	20	10	3
<i>PLDC.3i.o</i>	Sub-circuitos	20	5	4
N=Clientes P=Potenciais CA R=Potenciais rotas				

6.4 Síntese

As formulações matemáticas para PLD apresentadas nas últimas décadas incidem, em geral, sobre problemas reais e como tal incorporam muita informação não essencial que contribui para o seu aspecto pesado e complexidade acrescida. Este capítulo surge na convicção de que é necessário desenvolver formulações que possam contribuir para estruturar PLD elementares, como é o caso do PLDC. Neste sentido, são propostas quatro formulações em PLI para o PLDC, a partir das quais é possível incluir novas restrições adaptando-as às realidades em estudo.

Os PLDC pertencem à classe dos problemas NP-completos e por isso é de esperar que a sua resolução seja bastante difícil. As formulações aqui apresentadas demonstram isso mesmo. Com um elevado número de variáveis e restrições em número exponencial, a resolução directa a partir das formulações só é possível para problemas de reduzida dimensão. A fiabilidade de todas as formulações foi testada para problemas de pequena dimensão e em problemas maiores recorrendo à relaxação das restrições mais numerosas.

A compreensão, depuração e optimização das formulações é um desafio permanente e, neste sentido, a construção de algoritmos de resolução exacta a partir destas formulações poderá contribuir para o seu aperfeiçoamento.

Capítulo 7

Resolução Exacta do PLDC

7.1 Introdução

Apesar da reconhecida complexidade dos PLD têm existido algumas tentativas para proceder à sua resolução exacta, com especial relevo para alguns PLD específicos como sejam o *Round-Trip* e o PLD com caminhos. As tentativas de construção de algoritmos exactos para os PLD mais genéricos devem-se a Laporte et al. [134] que refere ter conseguido resolver problemas com 50 clientes.

A resolução exacta de PLD com rotas compostas por 2 clientes (*Round-Trip*) foi amplamente estudada com a proposta de vários algoritmos [40][41][89][65] [61][62][107][119].

O Problema de Localização do Caixeiro Viajante¹ também mereceu dos investigadores uma atenção especial com a publicação de estudos sobre a sua resolução exacta [23][24][6][7].

Para resolver PLD com caminhos, em geral relacionados com a localização e o transporte de lixos ou materiais perigosos, foram também desenvolvidos alguns algoritmos exactos [215][182][143][201].

Mas foi com Laporte e respectivos co-autores que surgiram as únicas propostas de resolução óptima de PLD com rotas múltiplas. A partir da relaxação de uma formulação em Programação Linear Inteira [132][135], começam por resolver um PLD com um único CA sem restrição no comprimento das rotas. De forma similar resolvem um PLD com múltiplos CA, com e sem capacidade [135][126][133]. Propõem ainda algoritmos exactos do tipo *branch-and-bound* para PLD específicos [136][131].

Min et al. [158] classifica os métodos usados na resolução exacta de PLD como sendo:

- métodos de pesquisa directa em árvore (*branch-and-bound*),
- métodos de programação dinâmica,

¹ Considera-se neste problema que o conjunto de clientes a visitar durante uma rota é uma variável aleatória. Obviamente, se este conjunto fosse determinístico a localização óptima do CA seria qualquer ponto do menor circuito hamiltoniano (percurso do caixeiro viajante).

- métodos de programação inteira,
- métodos de programação não linear,
- outros métodos.

Neste capítulo será apresentado um algoritmo de resolução exacta do PLDC não orientado. Trata-se de um algoritmo em Programação Inteira (PI) construído a partir da formulação *PLDC.2i.no* (p. 126).

7.2 Algoritmo Exacto

A eficiência dos algoritmos exactos depende fundamentalmente da correcta conjugação de uma formulação matemática com um método de resolução apropriado. Está ainda por efectuar um enorme trabalho ao nível da funcionalidade prática das formulações. O resultado da introdução de cada restrição tem de ser cuidadosamente avaliado, do ponto de vista prático e sob a aplicação de vários algoritmos. Este caminho conduzirá certamente a avanços em dois sentidos: por um lado, a aplicação prática dos algoritmos levará à depuração das formulações e, no sentido contrário, o refinamento das formulações ajudará a compreender melhor o funcionamento dos algoritmos e provavelmente conduzirá ao seu aperfeiçoamento. É uma tarefa aliciante mas, pela dificuldade e incerteza que encerra, não está talhada para o cumprimento de prazos de execução reduzidos; provavelmente será um desafio para uma vida.

Embora de forma ligeira, este trabalho já se iniciou com a construção e validação das formulações para o PLDC. Os estudos permitiram concluir que determinadas restrições propostas nas formulações do capítulo anterior, embora redundantes do ponto de vista teórico, não o são, de todo, do ponto de vista prático [15]. O processo de integração sucessiva das restrições, com a imediata visualização de resultados, esteve na base da construção das formulações, motivando muitas alterações e aperfeiçoamentos que, de outra forma, teriam sido imperceptíveis. Nesta fase foi comprovadamente reconhecido que a formulação mais indicada para servir de base a um algoritmo exacto era a *PLDC.2i.no*. Com um número de variáveis mais reduzido, facilita a aplicação de uma rotina comercial para resolução de problemas em PLI. A partir desta formulação é proposto o seguinte algoritmo de resolução exacta do PLDC.

Algoritmo 1 *Resolução Exacta do PLDC*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

Coordenadas de $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ potenciais CA com capacidade u_k e custo de instalação $f_k : k = 1, 2, \dots, p$.

w = capacidade dos veículos.

Resultados: Rotas dos veículos apoiadas nos CA.

Passo 1. Resolver o PLDC tal como formulado em PLDC.2i.no (p.126), relaxando as restrições (6.14), (6.15) e (6.16).

Passo 2. Avaliar a existência de percursos ilegais, isto é,

cadeias entre CA,

sub-rotas sem CA,

rotas com excesso de capacidade.

Passo 3. Se existem percursos ilegais, aplicar as restrições de eliminação respectivas e voltar ao passo 1. Caso contrário, terminar, a solução corrente é ótima.

Exemplo 11

Neste exemplo é mostrada a relaxação da formulação PLDC.2i.no (referida no passo 1) de uma pequena instância do PLDC, com 6 clientes e 2 potenciais CA, construída a partir dos ficheiros de dados Per183-12x2 (apêndice A). A cada veículo é atribuída uma capacidade de 60 unidades.

As variáveis x_1, \dots, x_{15} representam ligações entre os clientes 1, ..., 6.

As variáveis x_{16}, \dots, x_{27} representam as ligações entre os clientes e os potenciais CA 7 e 8.

As variáveis x_{28} e x_{29} representam as variáveis de localização y_7 e y_8 , enquanto que x_{30} e x_{31} representam as variáveis auxiliares z_7 e z_8 . A tabela seguinte mostra em pormenor cada variável.

		clientes						CA	
		1	2	3	4	5	6	$x_{28} = y_7$	$x_{29} = y_8$
clientes	1		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{16}	x_{17}
	2			x_6	x_7	x_8	x_9	x_{18}	x_{19}
	3				x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{20}	x_{21}
	4					x_{13}	x_{14}	x_{22}	x_{23}
	5						x_{15}	x_{24}	x_{25}
	6							x_{26}	x_{27}

As primeiras 6 restrições são do tipo (6.10) (ver formulação PLDC.2i.no, p. 126), a c_7 e c_8 do tipo (6.11), a c_9 e c_{10} do tipo (6.12) e a c_{11} do tipo (6.13). O formato ilustrado é precisamente o que é usado pela rotina de resolução², surgindo alguns termos em inglês.

²Rotina CPXmipopt do software comercial ILOG CPLEX 7.1.

\Problem name: Perl6 \times 2

Minimize

obj: $5.1x1+10.2x2+17.1x3+26.2x4+4.1x5+5.1x6+12.4x7+21.4x8+6.4x9+8.1x10+$
 $16.8x11+10.8x12+9.0x13+16.1x14+25.0x15+15x16+ 21.2x17+13.6x18+17x19+$
 $14.0x20+13.4x21+12.8x22+5.8x23+19.23x24+7.2x25+11.3x26+19.2x27+100x28+$
 $100x29$

Subject To

$$c1: x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x16 + x17 = 2$$

$$c2: x1 + x6 + x7 + x8 + x9 + x18 + x19 = 2$$

$$c3: x2 + x6 + x10 + x11 + x12 + x20 + x21 = 2$$

$$c4: x3 + x7 + x10 + x13 + x14 + x22 + x23 = 2$$

$$c5: x4 + x8 + x11 + x13 + x15 + x24 + x25 = 2$$

$$c6: x5 + x9 + x12 + x14 + x15 + x26 + x27 = 2$$

$$c7: 4.67 x28 - x30 \geq 0$$

$$c8: 4.67 x29 - x31 \geq 0$$

$$c9: x16 + x18 + x20 + x22 + x24 + x26 - 2 x30 = 0$$

$$c10: x17 + x19 + x21 + x23 + x25 + x27 - 2 x31 = 0$$

$$c11: x30 + x31 \geq 2$$

Bounds

$$0 \leq x16 \leq 2$$

$$0 \leq x17 \leq 2$$

$$0 \leq x18 \leq 2$$

$$0 \leq x19 \leq 2$$

$$0 \leq x20 \leq 2$$

$$0 \leq x21 \leq 2$$

$$0 \leq x22 \leq 2$$

$$0 \leq x23 \leq 2$$

$$0 \leq x24 \leq 2$$

$$0 \leq x25 \leq 2$$

$$0 \leq x26 \leq 2$$

$$0 \leq x27 \leq 2$$

$$0 \leq x30 \leq 100$$

$$0 \leq x31 \leq 100$$

Binaries

$x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13 x14 x15 x28 x29$

Generals(≥ 0)

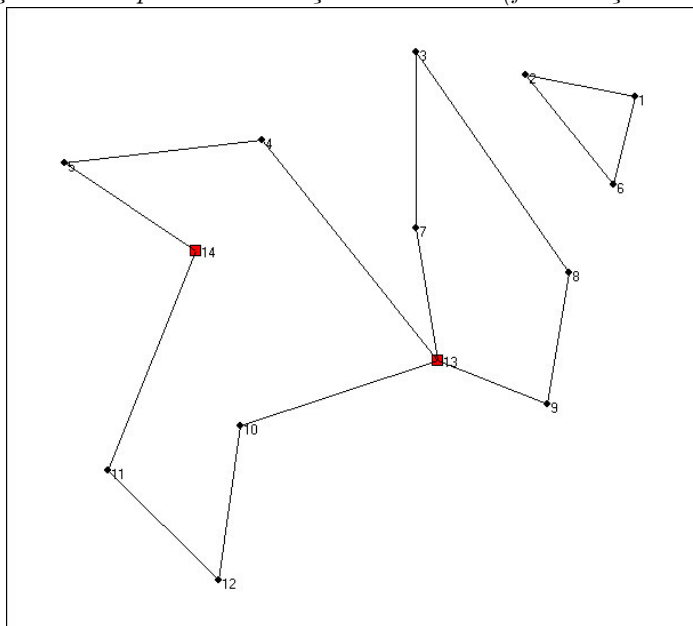
$x16 x17 x18 x19 x20 x21 x22 x23 x24 x25 x26 x27 x30 x31$

End.

Exemplo 12

Considere-se uma instância do PLDC construída a partir dos ficheiros *Perl83-12x2* (apêndice A), com 12 clientes e 2 potenciais CA. A capacidade dos veículos é de 60 unidades.

A figura mostra uma solução admissível do PLDC relaxado, resolvido no passo 1 do algoritmo 1. Ao aplicar o passo 2, são detectadas 4 rotas ilegais. A solução foi artificialmente construída para ilustrar todo o tipo de rotas ilegais que serão eliminadas com recurso à introdução das respectivas restrições relaxadas (formulação PLDC.2i.no).



Solução admissível do PLDC relaxado, após aplicação do passo 1.

A rota (cadeia) $\{13, 4, 5, 14\}$ é ilegal por ser uma cadeia com dois clientes entre dois CA. É eliminada com recurso às restrições (6.14) de PLDC.2i.no, mais concretamente $x_{4,13} + 3x_{45} + x_{5,14} \leq 4$.

A rota (cadeia) $\{13, 10, 12, 11, 14\}$ é ilegal por ser uma cadeia com 3 clientes entre dois CA. É eliminada com recurso às restrições (6.15) de PLDC.2i.no, mais concretamente $x_{10,13} + 2x_{10,12} + 2x_{11,12} + x_{11,14} \leq 5$, com $h = 5$.

A rota $\{1, 2, 6\}$ é ilegal por ser uma rota não apoiada num CA. É eliminada com recurso às restrições (6.16) de PLDC.2i.no, mais concretamente $x_{12} + x_{16} + x_{26} \leq 1$.

A rota $\{13, 9, 8, 3, 7, 13\}$ é ilegal por ser uma rota com excesso de capacidade. É eliminada com recurso às restrições (6.16) de PLDC.2i.no, mais concretamente $x_{37} + x_{38} + x_{39} + x_{78} + x_{89} + x_{89} \leq 2$. Note-se que $\left\lceil \frac{\sum e_i}{w} \right\rceil = \left\lceil \frac{80}{60} \right\rceil = 2$.

Após a inclusão de todas as restrições que eliminam as rotas ilegais o algoritmo continua com regresso ao passo 1.

Um algoritmo de resolução que opera a partir da relaxação de algumas restrições,

como é o caso do algoritmo 1, funciona como se de um algoritmo dual se tratasse. Determina sucessivas soluções não admissíveis (uma em cada iteração) sempre em busca da admissibilidade. Em cada iteração, com a introdução de novas restrições, há uma aproximação à admissibilidade e um consequente aumento do custo da função objectivo. Quando a alcança, está em presença da solução óptima. Mesmo que não seja viável alcançar a solução óptima é possível, após algum tempo de cálculo, extrair um limite inferior do valor do custo da solução óptima. Um conhecimento de extrema importância dado que, em conjunto com os limites superiores obtidos como resultado da resolução heurística (capítulo 9), permite enquadrar o valor da solução óptima e desta forma avaliar o erro cometido.

7.3 Resultados Computacionais

7.3.1 Instâncias do PLDC

Para servir de base aos testes computacionais foi construído um vasto e variado conjunto de instâncias do PLDC. No seu conjunto, são 19 instâncias elaboradas a partir de ficheiros de dados sobre clientes e potenciais CA, ilustrados no apêndice A com pormenorizada explicação sobre a sua origem e formato (tabela 7.1). Algumas instâncias foram directamente recolhidas da literatura, como é o caso das propostas por Perl [176], Daskin [58] e Or [173] ou adaptadas a partir de problemas de rotas de veículos como sejam as instâncias construídas a partir dos ficheiros de dados fornecidos por Gaskell [81], Christofides e Eilon [45] e Min et al. [157].

O nome da instância indica o autor, o ano de publicação, o número de clientes e o número de potenciais CA, respectivamente. Por exemplo, Perl83-12x2, significa que o autor é Perl, o ano de publicação foi 1983, possui 12 clientes e 2 potenciais CA. Cada instância é construída a partir de 2 ficheiros de dados; por exemplo, a instância Perl83-12x2 é composta pelo ficheiro de dados Perl83Cli12x2 (relacionado com os clientes) e Perl83CA12x2 (relacionado com os CA) e ainda pelo valor da capacidade dos veículos, a indicar pelo utilizador. Obviamente, atribuindo valores diferentes à capacidade dos veículos é possível obter instâncias distintas a partir dos mesmos ficheiros de dados. Por exemplo, com os dados indicados nos ficheiros Gaskell67-32x5 foram construídas as instâncias 4 e 5; uma com limite de capacidade 8000, indicado pelo autor dos dados, e outra com capacidade 11000. O mesmo acontece com os dados Perl83-318x4. No apêndice A é possível consultar os ficheiros de dados a partir dos quais foram construídas todas as instâncias.

Na tabela 7.1 são relatadas as instâncias. A coluna assinalada com a letra *w* indica a capacidade dos veículos (assinalada com um asterisco quando é devida ao autor dos dados). Com base no somatório das encomendas dos clientes (tabela A.4, p. 232) e na capacidade dos veículos, é determinado o número mínimo de rotas, indicado na coluna

Tabela 7.1: Instâncias do PLDC.

INSTÂNCIA		w	NMR	NC/R
1	Gaskell67-21x5	6000*	4	5,25
2	Gaskell67-22x5	4500*	3	7,33
3	Gaskell67-29x5	4500*	3	9,66
4	Gaskell67-32x5	8000*	4	8
5	Gaskell67-32x5	11000	3	10,67
6	Gaskell67-36x5	250	4	9
7	Christofides69-50x5	160*	5	10
8	Christofides69-75x10	140*	10	7,5
9	Christofides69-100x10	200*	8	12,5
10	Perl83-12x2	140*	2	6
11	Perl83-55x15	120*	10	5,5
12	Perl83-85x7	160*	11	7,27
13	Perl83-318x4	25000*	8	39,75
14	Perl83-318x4	8000	24	13,25
15	Min92-27x5	2500	4	6,75
16	Min92-134x8	850*	10	13,4
17	Daskin95-88x8	9000000	5	17,6
18	Daskin95-150x10	8000000	10	15
19	Or76-117x14	150*	5	23,4
w=Capacidade dos veículos. (*) indicada pelo autor				
$NMR = \left\lceil \frac{\sum e_i}{w} \right\rceil$ = Número mínimo de rotas				
$NC/R = \frac{\text{Número de Clientes}}{NMR}$				

NMR. Em coluna própria (NC/R) é também indicado o número médio de clientes por rota.

7.3.2 Software de Apoio

Para implementar o algoritmo de resolução exacta do PLDC (algoritmo 1) foi construído um programa informático que permite resolver PLDC de pequena dimensão (até 36 clientes e 5 potenciais CA). A interface com o utilizador é ilustrada nas figuras seguintes. Assim, inicialmente o utilizador deverá introduzir um conjunto de parâmetros com a ajuda de um quadro de interacção, tal como é ilustrado na figura 7.1.

O utilizador escolhe um dos ficheiros de clientes e de potenciais CA (tabela 7.1) e o número de clientes e de potenciais CA (sem exceder o limite de clientes e CA imposto pelos ficheiros). Após a entrada destes dados, surge uma imagem representando os clientes no plano (pequenos círculos pretos) e os potenciais CA (quadrados amarelos), tal como ilustra a figura 7.2. A ordem de grandeza das coordenadas dos clientes e dos CA varia muito de instância para instância, sendo necessário adaptar estes dados ao mesmo espaço de visualização gráfica. Para isso, os dados sofrem um processo de uniformização que os adapta às dimensões da janela de imagem do computador (este

Figura 7.1: Resolução computacional do PLDC - quadro inicial.

processo de uniformização dos dados é descrito em pormenor na secção 8.7.1 (p. 212)).

A instância só ficará completamente definida com a introdução da capacidade máxima dos veículos. Para auxiliar na escolha da capacidade, surgem alguns parâmetros de apoio. O primeiro indica a capacidade mínima admitida, correspondente à soma da maior encomenda com a menor, garantindo que, pelo menos uma rota, poderá ter dois clientes. O segundo corresponde à encomenda média por cliente, permitindo escolher a capacidade máxima dos veículos com uma ideia aproximada do número de clientes por rota.

Também é indicado o número de arcos na rede (correspondentes às ligações entre os clientes e entre estes e os CA) e o número de nodos (número de clientes mais número de CA).

O passo final consiste em dar início ao processo de resolução da instância escolhida, usando o algoritmo 1. No passo 1 deste algoritmo é necessário resolver um problema em PLI, tarefa que é executada com recurso à rotina CPXmipopt que integra o *software* ILOG CPLEX 7.1³. A solução obtida é ilustrada na janela de imagem tal como é indicado na figura 7.3 (os CA não instalados são indicados a amarelo e o CA aberto a vermelho). Simultaneamente, são mostrados alguns resultados sobre o PLDC resolvido na última iteração (número de variáveis, número de restrições, número de entradas não

³As ferramentas de *hardware* e *software* utilizadas são as mesmas já indicadas na página 113.

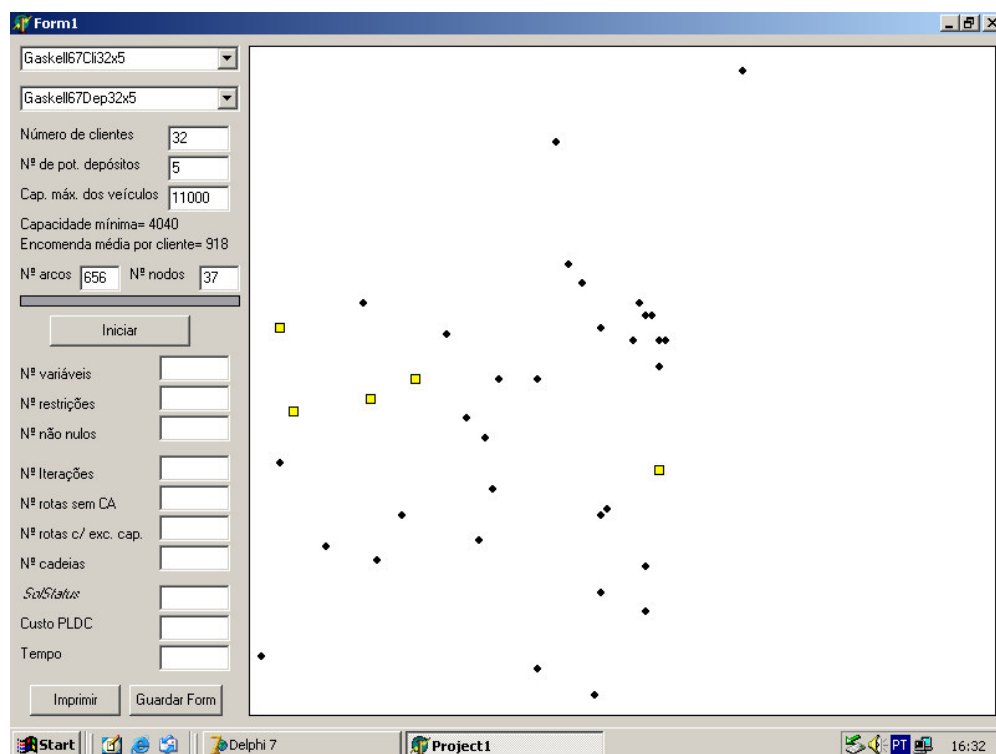


Figura 7.2: Resolução computacional do PLDC - quadro intermédio.

nulas na matriz de restrições) e sobre o processo de resolução (número de iterações, número de restrições de eliminação de sub-rotas sem apoio nos CA, número de restrições de eliminação de sub-rotas com excesso de capacidade, número de restrições de eliminação de cadeias entre CA). Finalmente, alguns resultados sobre o estado da solução (existência ou não de solução admissível, solução ilimitada, solução óptima ou quase óptima), o seu custo (custo de distribuição mais custo de localização) e o tempo de resolução.

7.3.3 Análise de Resultados

A tabela 7.2 apresenta alguns resultados referentes às 19 instâncias descritas na tabela 7.1. Os resultados foram obtidos com o software descrito na secção anterior que, por sua vez, aplica o algoritmo 1. É indicado o número de iterações, o número de restrições relaxadas (relacionadas com rotas ilegais: cadeias entre CA, rotas sem CA e rotas com excesso de capacidade) que foi necessário acrescentar, o valor da função objectivo (**C**usto da **S**olução **R**elaxada do PLDC) e o tempo (em segundos). Os custos referem-se a uma solução corrente, não admissível, cujo valor representa um limite inferior do valor da solução óptima, excepto nos casos em que esta foi alcançada. No apêndice B (p. 277) são indicados mais dados relativos às soluções óptimas assinaladas na tabela 7.2 com um asterisco junto ao valor da função objectivo.

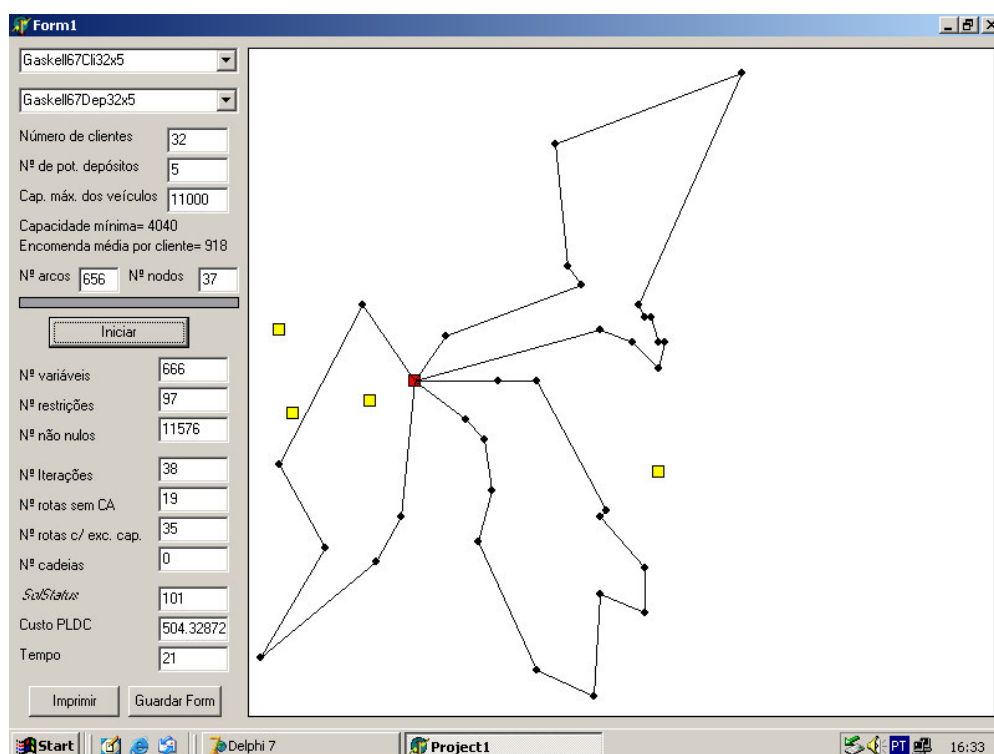


Figura 7.3: Resolução computacional do PLDC - quadro final.

Relativamente às instâncias 13, 14 e 16 não foi possível obter um limite inferior. A rotina de programação inteira, que é chamada a executar o passo 1 do algoritmo 1, actua com base num método de pesquisa em árvore, do tipo *branch-and-bound*, resolvendo um sub-problema do problema original em cada ramificação da árvore. A dimensão das instâncias 13, 14, 16 e 18, conduziu rapidamente ao esgotamento da memória computacional disponível, causando um erro logo na primeira iteração, instâncias 13 e 14, ou nas iterações seguintes, instâncias 16 e 18. Na instância 18, usando um artifício de interrupção do algoritmo na iteração imediatamente anterior à produção do erro, foi possível extrair um limite inferior do valor da solução óptima (com alguma qualidade).

O algoritmo 1 foi aplicado a cada uma das instâncias com o único propósito de conseguir alcançar a solução óptima ou então, nos casos em que isso não fosse viável, um bom limite inferior do valor da solução óptima (o melhor possível). Em 7 das 8 instâncias de menor dimensão (até 36 clientes e 5 potenciais CA) foi alcançada a solução óptima. A instância 4 (Gaskell67-32x5), embora de dimensão reduzida promove, durante o cálculo, um grande número de rotas com excesso de capacidade, inviabilizando a obtenção da solução óptima. Apesar das experiências com a substituição das restrições de eliminação de sub-rotas por restrições de conectividade [15], que Bellmore e Mallone [20] consideram mais eficazes (*more effective*), o problema persiste sendo apenas possível obter um limite inferior do valor da solução óptima.

Tabela 7.2: Resultados relativos à resolução exacta de PLDC.

Instâncias		Nº It.	Rotas Ilegais			CSR	T(s)
			Cad	s/ CA	ExCp		
1	Gaskell67-21x5	254	352	5	100	424,9*	1944
2	Gaskell67-22x5	29	0	4	32	585,1*	10
3	Gaskell67-29x5	68	14	52	52	512,1*	128
4	Gaskell67-32x5	994	18	19	1379	556,5	47022
5	Gaskell67-32x5	38	0	19	35	504,3*	24
6	Gaskell67-36x5	142	0	57	152	460,4*	503
7	Christofides69-50x5	398	546	70	272	549,4	50797
8	Christofides69-75x10	348	545	152	330	744,7	302457
9	Christofides69-100x10	210	232	138	183	788,6	74754
10	Perl83-12x2	11	0	3	8	204*	2
11	Perl83-55x15	364	667	117	258	1074,8	54238
12	Perl83-85x7	183	370	83	167	1568,1	86330
13	Perl83-318x4	—	—	—	—	—	—
14	Perl83-318x4	—	—	—	—	—	—
15	Min92-27x5	47	36	23	24	3062*	23,4
16	Min92-134x8	—	—	—	—	—	—
17	Daskin95-88x8	453	959	41	27	356,4	75791
18	Daskin95-150x10	25	0	94	7	43406	3548
19	Or76-117x14	152	182	127	46	12048,4	40728

O tempo de cálculo não condicionou a aplicação do algoritmo, interrompido apenas quando o avanço na melhoria do valor da função objectivo se revelava pouco promissor. Na instância 8, um intervalo de variação do valor da solução óptima relativamente elevado (ver tabela 8.8, p. 220), motivou um maior tempo de cálculo na tentativa de alcançar um melhor limite inferior. A análise do tempo por iteração confirma que as instâncias maiores consomem mais tempo enquanto que, entre as de dimensão semelhante, se verifica que mais tempo de resolução equivale a mais tempo por iteração, acusando o peso das restrições de eliminação de rotas ilegais que vão sendo acrescentadas.

O gráfico ilustrado na figura 7.4 mostra o comportamento percentual do número de restrições acrescentadas no decorrer do algoritmo 1 (correspondentes às colunas Cad, s/CA e ExCp da tabela 7.2). É de realçar o grande desequilíbrio que a instância 4 apresenta relativamente ao número de restrições de eliminação de rotas com excesso de capacidade (ExCp), principais responsáveis pela não obtenção da solução óptima. À primeira vista parece que o grande número de restrições do tipo ExCp pode estar relacionado com a folga existente na capacidade das rotas. Por exemplo, se a instância 1 necessita de 3,75 rotas para distribuir a totalidade das encomendas dos clientes e a instância 4 apenas de 3,67 rotas, seria de esperar que fosse mais difícil distribuir as encomendas no caso da instância 1, proporcionando um maior número de restrições do

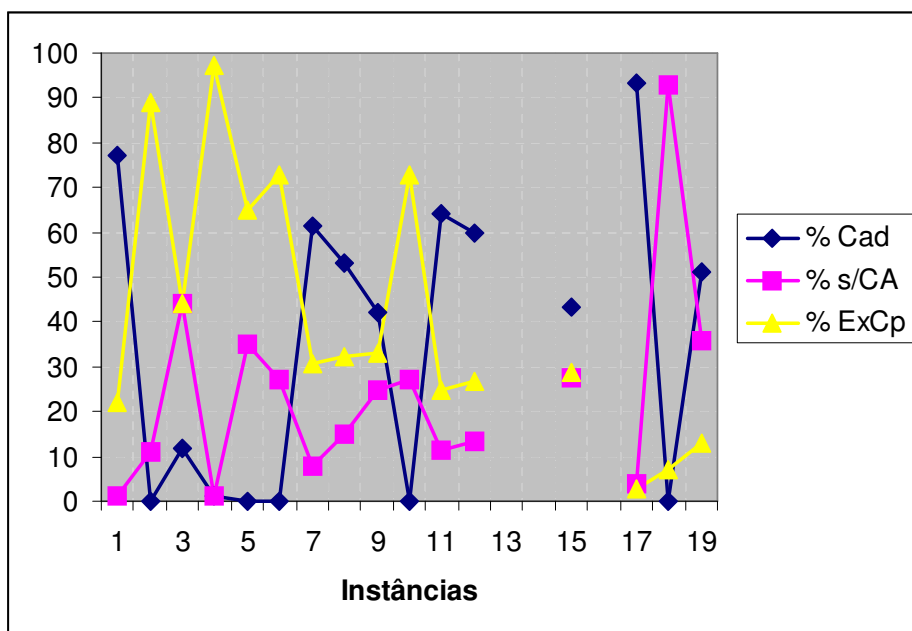


Figura 7.4: Percentagem de restrições acrescentadas.

tipo ExCp. Na verdade, não existe correlação significativa entre a folga da rota e o número de restrições do tipo ExCp.

No geral, a figura 7.4 mostra que as instâncias 2, 3, 4, 5, 6 e 10 (as mais pequenas, exceptuando a 1) são mais propícias à formação de rotas com excesso de capacidade e reduzido número de cadeias. A instância 1 e as instâncias de maior dimensão, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 17 e 19 invertem esta tendência, acrescentando um maior número de restrições de eliminação de cadeias. A instância 18, interrompida à 25ª iteração, revela que as restrições de ligação das rotas aos CA são predominantes nas primeiras iterações.

7.4 Síntese

Neste capítulo foi apresentado um algoritmo em Programação Inteira para a resolução exacta de PLDC. O algoritmo opera a partir da relaxação das restrições mais numerosas da formulação *PLDC.2i.no*, introduzindo iterativamente estas restrições quando violadas. Foram ainda realizados testes computacionais sobre um conjunto de 19 instâncias do PLDC, na sua maioria construídas propositadamente para este trabalho a partir de ficheiros de dados recolhidos da literatura (apêndice A).

Para algumas instâncias do PLDC de menor dimensão foi possível encontrar a solução óptima e para as restantes (excepto em três casos) chegou-se a um limite inferior do valor da solução óptima.

A construção de algoritmos exactos mais eficientes é uma área em aberto. A relaxação das restrições de integralidade na formulação *PLDC.2i.no* permite o recurso ao

Método do Simplex e pode ser uma via promissora para tentar a resolução de problemas maiores e mais complexos. A integralidade pode ser depois restaurada com recurso à inclusão de restrições de planos de corte ou procedimentos do tipo *branch-and-bound*. Actualmente as ferramentas de cálculo para aplicação do Simplex são de tal forma potentes, que esta pode ser uma via de resolução muito interessante.

Apesar das afirmações pouco encorajadoras de Laporte [127] relativamente à funcionalidade das formulações com 3 índices, não está provado que não possam ser usadas com sucesso. Para instâncias de reduzida dimensão foi confirmada a sua funcionalidade, tal como é demonstrado no apêndice D. Só um estudo aprofundado da sua estrutura, do efeito prático de integração de cada restrição e do seu comportamento sob relaxação ou outro método de resolução pode dissipar as dúvidas sobre estas formulações.

A escolha da formulação mais apropriada a cada método de resolução é um trabalho minucioso, demorado e quase todo ainda por efectuar. Representa, sem dúvida, o futuro imediato da investigação sobre a resolução exacta do PLDC.

A procura de melhores algoritmos exactos para resolver problemas como o PLDC é uma tarefa que apenas começou. É necessário ter a perfeita consciência da natureza NP-completa deste tipo de problemas e das limitações que daí advêm. Os métodos actuais de resolução de problemas formulados em PLI e a velocidade oferecida pelos meios de cálculo computacional não permitem ainda aspirar a grandes avanços nesta área. Sabendo à partida que não será provável alcançar muito em pouco tempo é, contudo, indispensável que este trabalho imenso e minucioso seja continuado de forma persistente, na certeza de que, com pequenos avanços, será possível no futuro resolver maiores e mais complexos problemas.

Capítulo 8

Resolução Heurística do PLDC

8.1 Introdução

A procura de algoritmos que resolvam de forma exacta o PLDC esbarra inevitavelmente com um facto difícil de contornar; o PLDC é NP-completo e como tal é pouco provável que venham a existir algoritmos que resolvam problemas de grande dimensão em tempo aceitável. Em face de tão forte argumento não resta ao investigador outro caminho que não seja o de contornar este obstáculo, procurando descobrir algoritmos heurísticos que permitam obter boas soluções aproximadas em tempo razoável.

Os algoritmos heurísticos apresentam mesmo algumas vantagens relativamente aos exactos. Podem produzir mais do que uma solução, atribuindo ao utilizador a flexibilidade de poder escolher a melhor solução em face dos objectivos. Permitem obter boas soluções em tempo aceitável, são fáceis de entender, modificar e implementar e abrem a porta à resolução de problemas de muito maior dimensão. Com tais argumentos não é surpresa que a maioria das publicações sobre PLD proponha métodos de resolução aproximada.

Os métodos heurísticos para resolução de PLD têm sofrido uma evolução constante nas últimas 4 décadas e hoje é já possível classificá-los, tendo em conta a forma como tratam a interligação entre a localização e a distribuição.

Os métodos de transformação foram os primeiros a ser propostos. Têm como característica principal a resolução dos PLD como sendo Problemas de Localização-Afectação (PLA) ou então Problemas de Rotas de Veículos (PRV). No primeiro caso, os clientes pertencentes à mesma rota são colapsados e tratados como se fossem um único cliente. Depois, é resolvido um PLA considerando somente os clientes "representantes" da rota e uma das muitas funções de custo existentes para estas situações. No segundo caso, são resolvidos PRV para todas as combinações possíveis de CA, sendo depois escolhida a opção mais económica.

Os métodos sequenciais recorrem à resolução sequencial dos dois problemas que estão na base dos PLD isto é, PLA e PRV.

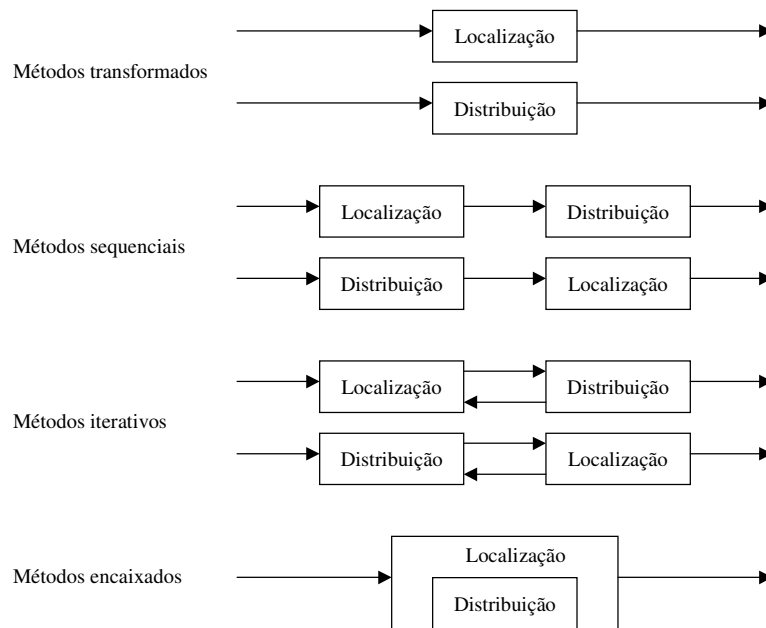


Figura 8.1: Classificação dos métodos heurísticos para resolução de PLD.

A aplicação iterativa do método sequencial conduz aos chamados métodos iterativos.

Se o PRV for embebido e subordinado ao PLA, considerado principal, então obtém-se uma estrutura hierárquica que conduz aos métodos encaixados [165].

Na figura 8.1 é apresentada uma classificação dos métodos heurísticos para resolução de PLD, adaptada a partir da proposta de Nagy e Salhi [164], relativamente à qual são acrescentados os métodos transformados e, ao nível dos métodos sequenciais e iterativos, é contemplada uma segunda possibilidade: distribuição-primeiro, localização-depois.

Qualquer destes métodos de resolução pode ser alvo de procedimentos de melhoramento, em geral recorrendo a um método de pesquisa local ou a qualquer meta-heurística que permita alargar a zona de pesquisa.

Jacobsen e Madsen [109] propuseram 3 algoritmos heurísticos para o PLD. O primeiro, designado por *Tree Search*, é baseado na ideia de que, retirando o arco de regresso do veículo ao CA, se obtém uma árvore de suporte do grafo que representa a solução do PLD. Propõem então um processo de construção da árvore de suporte de custo mínimo, cumprindo as restrições adicionais. Trata-se de um algoritmo bastante interessante no sentido que constrói uma solução do problema como um todo, sem separar as componentes de localização e distribuição. Pena é, que os resultados computacionais tenham sido pouco prometedores. Os outros dois algoritmos, ALA-SAV e SAV-DROP, pelo contrário, provaram ser bastante eficientes e continuam a servir ainda hoje de referência a muitas investigações.

O algoritmo ALA-SAV é desenvolvido em duas fases. Na primeira, é aplicado o algoritmo ALA (Alternate Location-Allocation) [49] para detectar os CA abertos e

afectar-lhes os clientes mais próximos, de tal forma que a distância total seja mínima. De seguida é aplicado um procedimento do tipo SAV [47] em cada CA para construir as rotas.

O algoritmo SAV-DROP actua no sentido contrário; começa por formar rotas por todos os clientes, usando um procedimento SAV e um qualquer CA central. O primeiro cliente de cada rota é considerado um CA instalado. De seguida, usando um procedimento do tipo DROP [73], faz "cair" os CA quando a sua rota é afectada a outro CA. Faz sentido eliminar um CA quando o custo total sofrer uma redução, ou seja, se o custo de alteração das rotas é inferior ao custo fixo do CA a eliminar.

Srivastava [197] propõe uma nova heurística que designa por *Cluster-Routing Model*. Com recurso à árvore de suporte mínima da rede dos clientes forma um determinado número de grupos, refina os grupos criados e instala um CA em cada grupo. A ideia de recorrer a um processo específico para formação de grupos é fundamental para o que segue neste capítulo mas, fazer depender o número de CA do número de grupos formados, é uma enorme limitação da heurística de Srivastava. Srivastava e Benton [199] afirmam que o erro causado pela sequenciação de métodos é menos de 10% da solução obtida em simultâneo.

Nagy e Salhi [165] consideram os PLD como sendo essencialmente problemas de localização com inclusão de informação sobre as rotas dos veículos. Subordinam de forma clara a distribuição à localização e desta forma preconizam uma nova forma de abordagem de PLD que designam por métodos encaixados.

A construção de algoritmos heurísticos para o PLD é abordada noutros trabalhos de investigação [174][18][146][118][164][158][206] mas, no geral, sem acrescentar inovações substanciais relativamente aos já referidos.

Neste capítulo será apresentada uma nova forma de construção de algoritmos heurísticos para o PLDC baseada na Análise de Grupos.

8.1.1 Recurso à Análise de Grupos

A ideia de agrupar entidades com alguma forma de similitude é tão antiga como a existência humana. Organizar um vasto conjunto em grupos sensíveis a determinadas características é um dos mais elementares modos de compreensão e aprendizagem do mundo envolvente. Os animais e plantas são agrupados em espécies, as doenças segundo os sintomas e os automóveis segundo a disposição do espaço interior. Neste trabalho os artigos científicos sobre PLD sofreram um processo de agrupamento e os PLD foram alvo de uma classificação mais pormenorizada com alguma preocupação formal.

À medida que foi sendo necessário recorrer à classificação sistemática dos elementos que nos rodeiam foi também reconhecido que era necessário desenvolver um conjunto de técnicas que suportassem e auxiliassem essa classificação. Desta forma surgiu a Análise de Grupos, uma área científica que visa o desenvolvimento de procedimentos de divisão



Figura 8.2: Árvore representativa dos vários tipos de classificação. Fonte [110].

dos objectos ou indivíduos em grupos com base numa ou várias características dos mesmos objectos ou indivíduos.

A Análise de Grupos¹ é parte integrante de uma área mais vasta da estatística, designada por Classificação. A figura 8.2 dispõe em forma de árvore os diversos tipos de classificação.

Na classificação exclusiva, cada objecto pertence a um e um só grupo, ao contrário da não exclusiva que pode afectar um objecto a várias grupos ou classes.

A classificação intrínseca trabalha somente sobre a matriz de proximidade, enquanto que a extrínseca se suporta em informação adicional (níveis de categorias), permitindo uma partição *à priori* dos objectos de acordo com a categoria em que se inserem.

A classificação exclusiva e intrínseca subdivide-se em hierárquica e não hierárquica. A primeira tem como principal característica o facto de produzir uma sequência de partições encaixadas, enquanto que a segunda integra partições simples (não encaixadas).

Everitt [72] explica da seguinte forma o objecto de estudo da Análise de Grupos:

"Given a collection of n objects individuals, animals, plants etc., each of which is described by a set of p characteristics or variables, derive a useful division into a number of classes. Both the number of classes and the properties of the classes are to be determined."

Sendo assim, a Análise de Grupos estuda formalmente os métodos que permitem a identificação de grupos. A noção de grupo é, ela própria, um conceito incontornável

¹Tradução portuguesa da designação em inglês "*cluster analysis*".

para perceber os objectivos deste ramo da ciência. O parente mais próximo do grupo é o conjunto, entidade que o ser humano aprende intuitivamente a reconhecer e que faz parte da estrutura cognitiva criada pelo cérebro para perceber o meio que o rodeia². Apesar de o cidadão comum ter, em geral, uma clara noção de conjunto, a facilidade de assimilar o conceito contrasta com a dificuldade em o definir. Cantor³ propôs uma definição que, apesar de apresentar falhas (como é comprovado pelo célebre paradoxo de Russel)⁴, é em geral, aceite nos meios académicos como suficientemente esclarecedora da noção de conjunto. Segundo Cantor,

"A set is a result of collecting together certain well-determined objects of our perception or our thinking into a single whole; these objects are called the elements of the set."

A noção de grupo, perseguida pelos estudiosos da Análise de Grupos, vai mais além e considera que um grupo é um conjunto de elementos que apresentam algo em comum, isto é, um grupo é um conjunto de objectos similares, segundo determinadas características.

Jain e Dubes [110] reconhecem que esta noção de grupo é pouco precisa e chegam a considerar que:

"There is no single "best" criterion for obtaining a partition because no precise and workable definition of "cluster" exists."

No entanto, não deixam de citar Everitt [71] para, de alguma forma, justificar a apresentação de algumas definições de grupo. Considerando que os objectos são representáveis por pontos num espaço mensurável, Everitt (citado por Jain e Dubes [110]) coleccionou três definições muito interessantes de grupo [71] :

"A cluster is a set of entities which are alike, and entities from different clusters are not alike."

"A cluster is an aggregation of points in the test space such that the distance between any two points in the cluster is less than distance between any point in the cluster and any point not in it."

²Embora não seja matéria relevante para este trabalho, pode argumentar-se que acontece exactamente o contrário, isto é, o meio que nos rodeia é responsável pela criação das estruturas cognitivas que nos permitem diferenciar as classes. Por exemplo, um cidadão exterior ao meio artístico das artes plásticas não cria estruturas classificatórias que lhe permitam distinguir vários estilos de pintura.

³George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, matemático proeminente, fundador da Teoria dos Conjuntos. Nasceu a 3 Março de 1845 em St. Petersburg, Rússia e faleceu a 6 Janeiro de 1918 em Halle, Alemanha.

⁴Bertrand Arthur William Russell, destacado matemático da área da lógica. Reconhecido especialmente pelo célebre paradoxo que pôs em causa a definição de conjunto de Cantor e levou à construção de uma base axiomática para esta teoria. Nasceu 18 de Maio de 1872 em Ravenscroft, Trelleck, Monmouthshire, País de Gales e faleceu a 2 Fevereiro de 1970 em Penrhyndeudraeth, Merioneth, País de Gales.

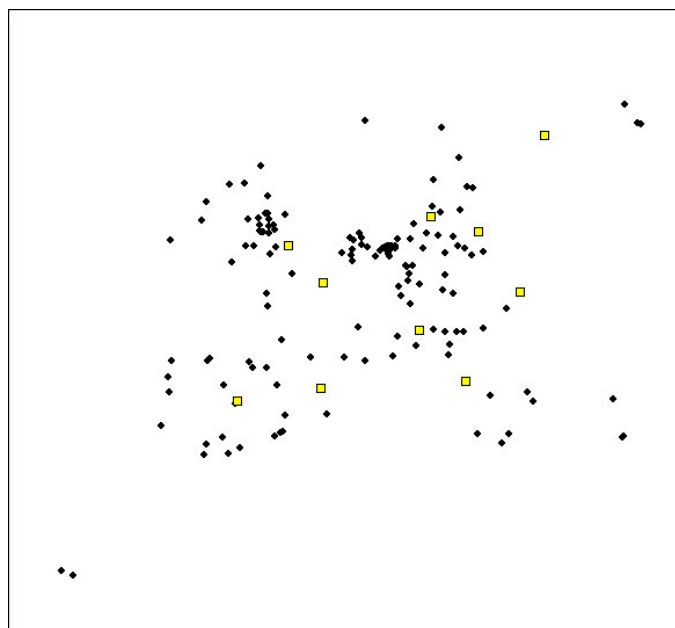


Figura 8.3: Representação gráfica das 150 maiores cidades europeias e 10 potenciais CA. Fonte [58].

"Cluster may be described as connected regions of a multi-dimensional space containing a relatively high density of points, separated from other such regions by a region containing a relatively low density of points."

Estas definições de grupo são um excelente predicado para justificar a utilização da Análise de Grupos como ferramenta na resolução de PLD. Reconhecer grupos de clientes no plano pode ser o começo da construção de boas soluções do PLD. A figura 8.3 mostra a representação gráfica das 150 maiores cidades europeias. As dez cidades mais populosas são representadas como potenciais CA (quadrados). Parece uma evidência que um PLD relacionado com estas cidades e potenciais CA construirá rotas preferencialmente sobre os aglomerados populacionais. À primeira vista, não parece difícil a identificação de alguns grupos de cidades que podem construir boas bases para os percursos de visita, por exemplo, na península ibérica e ilhas Canárias (canto inferior esquerdo), nas ilhas Britânicas, no norte da Europa ou na Itália e Grécia. Mas, o que é relativamente fácil de visualizar é, ao mesmo tempo, difícil de operacionalizar. Não obstante, a Análise de Grupos fornece, já hoje, um vasto conjunto de metodologias de agrupamento que podem ser testadas na construção de heurísticas para resolução de PLD. Sendo assim, é de prever que a construção de algoritmos que integrem bons métodos de agrupamento pode ser uma interessante oportunidade de investigação.

As potencialidades da Análise de Grupos foram também reconhecidas por outros autores que, servindo-se destas técnicas, apresentaram propostas de resolução de PLD

ou mesmo de problemas directamente relacionados, como sejam o PRV e PLA.

Dantzig e Ramser [55] foram provavelmente os primeiros a referir-se à identificação de grupos de pontos, no caso do PCV múltiplo, afirmando que "*One would look for clusters of points and determine by trial and error the order in which they should be traversed, taking care that no loop crosses itself.*".

Kuehn e Hamburger [121], a propósito do PLA, reconhecem também os benefícios que poderão advir do agrupamento entre os clientes mais próximos ao afirmar que "*... in many cases a priori judgements can be made that customers in certain geographical regions will not be serviced from potential warehouses in other regions. ... customers can frequently be aggregated into concentrations of demand (for example, metropolitan chain grocery and wholesaler warehouses) because of geographical proximity.*". Trata-se, provavelmente, de uma das primeiras referências explícitas sobre o interesse do agrupamento de clientes.

Fukunaga e Short [79] usam algoritmos de agrupamento em problemas de localização. O próprio Algoritmo de Clarke-Wright [47] é um exemplo de agrupamento que usa, com excelentes resultados, um procedimento original do tipo *saving* para determinar a matriz de proximidade. Bodin [28] refere a construção de grupos como sendo uma das técnicas de abordagem de Problemas de Rotas e Escalonamento de Veículos. Segundo Madsen [145], também Bednar e Strohmeier [18] se apoiam em técnicas de agrupamento para resolução de PLD. Cullen et al. [52] fazem uso de procedimentos rudimentares de agrupamento na construção de uma heurística para Problemas de Rotas. Branco e Coelho [32] e Barreto [11] usam processos de agrupamento na construção de algoritmos para um PLD específico designado por Problema da p -Mediana Hamiltoniana.

Min [155] foi dos primeiros a incluir explicitamente a análise de grupos em algoritmos para resolução de Problemas de Rotas de Veículos com distribuição e recolha. Numa primeira fase, é formado um conjunto de grupos, ajustando a dimensão de cada grupo de tal forma que não exceda a capacidade do camião que lhe é afecto. Usa a medida de proximidade Média de Grupo, com base numa observação de Romesburg [183] que se referiu às suas vantagens sobre a Ligação Simples ou Ligação Completa⁵. Num segundo artigo, Min et al. [157] optam por usar a medida de proximidade do tipo Ward, justificando a escolha na sua propensão para formar grupos de igual dimensão e em vários estudos que indicam esta medida como sendo a que melhores resultados permite obter.

Srivastava [198] também propõe uma heurística baseada em procedimentos de agrupamento. Com base na árvore de suporte mínima determina um conjunto de grupos que refina depois por um método do tipo *2-optimal*.

O verdadeiro início da abordagem dos PLD pela óptica da Análise de Grupos deve-se a Bruns e Klose. Com dois artigos publicados sobre o tema [118][33], os autores propõem

⁵Na próxima secção estas e outras medidas de proximidade serão abordadas.

uma heurística para resolução de um PLD que faz uso explícito dos procedimentos de agrupamento para determinar o custo associado a cada afectação de um cliente a um determinado CA. Não deixa de ser curioso o objectivo atribuído à formação dos grupos. Esperar-se-ia que constituíssem rotas iniciais. Mas não, servem unicamente para gerar uma estimativa de custo de afectação entre os clientes e os CA. O algoritmo heurístico proposto por Bruns e Klose desenvolve-se em 4 passos:

1. Determinar agrupamentos que podem ser servidos por um só veículo. Em cada agrupamento, determinar o custo da respectiva rota. Com base no custo da rota, estimar o custo de afectação de cada cliente a cada CA (o custo da rota é distribuído de forma igual por todos os clientes).
2. Resolver o Problema de Localização-Afectação.
3. Determinar as rotas e melhorá-las.
4. Se o custo total diminuiu, reestimar os custos de afectação e voltar ao passo 2. Caso contrário terminar.

Para determinar os grupos Bruns e Klose utilizaram procedimentos de agrupamento do tipo hierárquico com medidas de proximidade do tipo Ligação Simples, Ligação Completa, Média de Grupo e Ward.

Min [156] propõe também um método sequencial para um PLDC, que começa por agrupar os clientes usando um método hierárquico com a medida de proximidade do tipo Ward. Defende este tipo de medida mas sem apresentar resultados que o comprovem.

Tendo em conta a análise bibliográfica efectuada, são poucos os autores que recorreram de forma explícita à Análise de Grupos como ferramenta para estudar PLD. Os trabalhos referidos limitaram-se a fazer um uso algo periférico das técnicas de agrupamento. Alguns fazem uma aproximação a estas técnicas sem o referirem, outros fazem uso de um ou outro procedimento específico sem testar comparativamente a sua eficácia face aos demais ou apresentar justificação para a sua escolha.

Desta forma, continuam por avaliar as reais potencialidades das técnicas de Análise de Grupos na construção de algoritmos heurísticos e não existe qualquer avaliação comparativa entre as várias técnicas de agrupamento. É objectivo deste capítulo propor tais algoritmos e efectuar uma análise da sua eficácia na resolução do PLDC.

8.1.2 Medidas de Proximidade Entre Grupos

A Análise de Grupos⁶ propõe um leque de métodos de agrupamento diferenciados consoante o tipo de variáveis em análise⁷. Os dados trabalhados neste texto são cons-

⁶A consulta do trabalho pioneiro de Anderberg [5] é indispensável à familiarização com a Análise de Grupos. Outros autores serão referenciados ao longo do texto.

⁷Variáveis qualitativas, quantitativas, binárias ou mistas.

tituídos por variáveis quantitativas constituídas por coordenadas de pontos no plano. Estas variáveis serão alvo de classificação com base em métodos hierárquicos e métodos não hierárquicos (ou de partição).

A noção de proximidade entre dois grupos de elementos assume um papel de primordial importância em todos os métodos de agrupamento. Neste texto são apresentadas várias funções para o efeito. Em comum, quantificam a proximidade entre dois grupos com base no conceito de proximidade entre dois elementos que, no presente caso, são pontos no plano. Na literatura têm sido propostas várias medidas para determinar a proximidade entre dois pontos no plano [5][95]; no entanto, a mais comum, tratando-se de dados quantitativos, é a métrica euclidiana que determina a proximidade $d(I, J)$ entre os pontos I e J de coordenadas (x_i, y_i) e (x_j, y_j) , respectivamente, como sendo a menor distância em linha recta entre os pontos dada por,

$$d(I, J) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

É a partir deste conceito de proximidade entre dois elementos que são propostas várias medidas de proximidade entre grupos de elementos. Ao longo deste texto serão alvo de estudo seis medidas de proximidade relatadas na tabela 8.1. Com excepção da medida de proximidade do tipo *saving*, mais conhecida nos textos sobre Investigação Operacional, as restantes são muito populares na literatura sobre Análise de Grupos [5][110][116][72].

A tabela 8.1 mostra uma representação gráfica e analítica das várias medidas de proximidade entre dois grupos (conjuntos finitos) de pontos A e B . Cada elemento de um conjunto é constituído por um par de coordenadas no plano (o elemento I de um conjunto é constituído pelas coordenadas (x_i, y_i)). As medidas de proximidade Centróide e Ward são definidas a partir do conhecimento do centróide (centro de gravidade) de cada grupo, designados por m_A e m_B e definidos por,

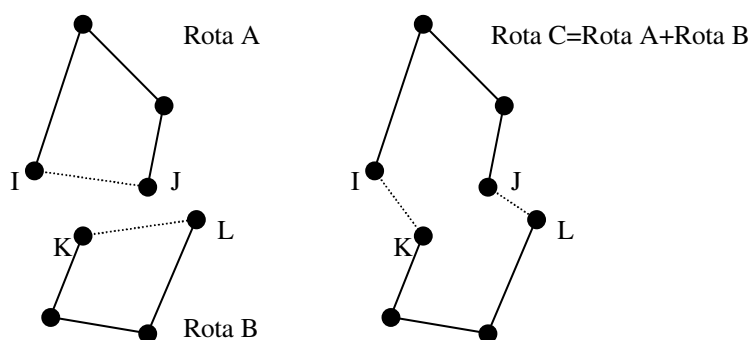
$$m_A = \left(\frac{\sum_{I \in A} x_i}{|A|}, \frac{\sum_{I \in A} y_i}{|A|} \right)$$

$$m_B = \left(\frac{\sum_{I \in B} x_i}{|B|}, \frac{\sum_{I \in B} y_i}{|B|} \right)$$

Na determinação da medida de proximidade Ward faz-se referência à soma do erro quadrático de um grupo. Trata-se de uma medida que indica o desvio dos elementos do grupo relativamente ao centróide. Para um grupo A é dada por,

$$SEQ(A) = \sum_{I \in A} [d(I, m_A)]^2$$

O desenvolvimento da medida de proximidade de Ward pode ser acompanhado com mais detalhe em Kaufman e Rousseeum [116], (p. 230ss).



$$S = d(I, J) + d(K, L) - d(I, K) - d(J, L)$$

Figura 8.4: Medida de proximidade do tipo *saving*.

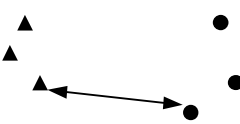
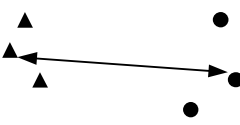
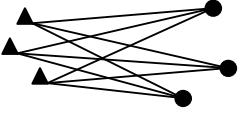
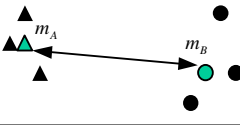
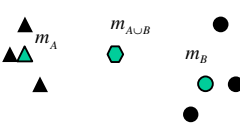
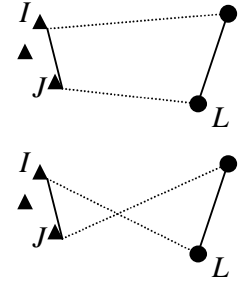
A noção de proximidade está intimamente relacionada com o uso que será dado a essa medida. Por exemplo, as aplicações referenciadas nas publicações sobre Análise de Grupos estão em geral relacionados com a ciências Biológicas ou Sociais, recorrendo a medidas de proximidade que se adequam aos dados e propósitos em vista. Estando sobejamente provado, desde o célebre artigo de Clark e Wright [47], que uma função do tipo *saving* permite obter excelentes percursos do Caixeiro Viajante, seria quase uma inevitabilidade que esta fosse acrescentada às restantes, uma vez que está em causa a construção de grupos que proporcionem o traçado de boas rotas.

A função de proximidade do tipo *saving*, apresentada por Clark e Wright [47] para avaliar a proximidade entre duas rotas com um CA em comum, pode perfeitamente ser generalizada de forma a permitir o cálculo da proximidade entre dois grupos de pontos A e B , tal como é indicado na tabela 8.1. Em termos práticos, esta medida parte do princípio que, em cada grupo, foi formada uma rota e tenta quantificar a poupança obtida pela união das duas rotas. A figura 8.4 ilustra, com um exemplo, a medida *saving* (S) obtida pela união das rotas.

Vários autores têm tentado demonstrar a superioridade de uma ou outra medida, de proximidade, no entanto, apesar dos esforços, não existe ainda uma ideia clara sobre as potencialidades gerais ou específicas de cada uma.

Jain e Dubes [110] (p. 83) referem a não existência, por enquanto, de regras claras que conduzam à escolha de uma medida de proximidade em detrimento de outras. A medida de Ward é muito utilizada, mas a imposição de um critério à partida (soma do erro quadrático) pode não ser apropriado para investigar a estrutura dos dados. Jardine e Sibson [112] (citado por Jain e Dubes, p. 138) concluem que a medida Ligação Simples é a única que satisfaz todos os critérios matemáticos que eles próprios tinham definido. Contudo, ao longo dos anos, os estudos e aplicações têm concluído que esta é a que piores resultados permite obter. Golden e Meehl [93], por seu lado, referem

Tabela 8.1: Representação gráfica e analítica das medidas de proximidade entre grupos.

<p>Grupo A Grupo B</p> 	<p>Ligação Simples</p> $Prox(A, B) = \min_{\substack{I \in A \\ J \in B}} d(I, J)$
	<p>Ligação Completa</p> $Prox(A, B) = \max_{\substack{I \in A \\ J \in B}} d(I, J)$
	<p>Média de Grupo</p> $Prox(A, B) = \frac{\sum_{I \in A; J \in B} d(I, J)}{ A B }$
	<p>Centróide</p> $Prox(A, B) = d(m_A, m_B)$
	<p>Ward</p> $Prox(A, B) = SEQ(A + B) - SEQ(A) - SEQ(B) = \frac{ A B }{ A + B } [d(m_A, m_B)]^2$
	<p>Saving</p> $Prox(A, B) = \min_{\substack{I, J \in A \\ K, L \in B}} [min(S_1, S_2)]$ $S_1 = d(I, J) + d(K, L) - d(I, K) - d(J, L)$ $S_2 = d(I, J) + d(K, L) - d(I, L) - d(J, K)$

que a Média de Grupo, Ligação Completa e Ward conduzem a melhores resultados que a Ligação Simples e Centróide para um conjunto de dados específicos. Bayne et al. [17] afirmam que as medidas Ward e Ligação Completa são preferíveis à Centróide e Média de Grupo. Milligan e Schilling [154] afirmam que a medida de Ward tem tendência para formar grupos de igual dimensão, o que no caso dos PLD pode ser uma vantagem (Min et al. [156] também aplicaram esta medida com base neste pressuposto). Jain e Dubes [110] (p. 75) referem que, em geral, os métodos de agrupamento têm a desvantagem de identificar grupos mesmo quando eles não existem naturalmente. Mais uma vez, o que parece ser uma desvantagem pode ser uma dos maiores incentivos à sua aplicação na resolução de PLD. Muitos outros autores [26],[53],[98],[122],[160],[153] chegam aos seus próprios resultados, por vezes contraditórios. A não concordância dos variadíssimos estudos de avaliação das diversas medidas de proximidade dá credibilidade à opinião de Edelbrock e McLaughlin [66] que admitem não existir superioridade de uma medida para todas as aplicações. Para cada caso deve ser escolhida cuidadosamente uma determinada medida e provavelmente só depois de efectuados testes com várias se pode chegar a conclusões definitivas.

8.2 Algoritmo Heurístico Baseado na Análise de Grupos

No seguimento da secção anterior, é objectivo deste capítulo avaliar o desempenho de vários métodos de agrupamento e medidas de proximidade na construção de algoritmos para resolução do PLDC. Para esse efeito é necessário construir uma heurística simples, que faça uso das técnicas de agrupamento e não contenha outros factores de perturbação, para além das diferenças entre as diversas técnicas. Só assim será possível relacionar as eventuais diferenças de resultados com os métodos de agrupamento empregues, sem correr riscos de que estas diferenças possam ser mascaradas por procedimentos intermédios, mais ou menos complexos. Para cumprir estes objectivos, optou-se por um método sequencial do tipo distribuição→localização (figura 8.1), cujos passos essenciais são descritos no algoritmo 2. É um algoritmo simples, com alguns passos de resolução exacta que podem contribuir para realçar as pequenas diferenças existentes entre os métodos de agrupamento e conduzir, no final, a boas soluções do PLDC. Min [156] e Balakrishnan et al. [8] defendem que, no caso de a capacidade dos veículos ser limitada e o custo fixo dos CA ser significativo, o método sequencial cria menos dificuldades do ponto de vista computacional do que o simultâneo. Srivastava e Benton [199] também concluem por uma margem de erro pequena, perfeitamente aceitável. Ghiani e Laporte [88] concluem que são obtidos melhores resultados realizando primeiro a fase de distribuição e depois a de localização.

Algoritmo 2 *Resolução Heurística do PLDC*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

Coordenadas de $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ potenciais CA com capacidade u_k e custo de instalação $f_k : k = 1, 2, \dots, p$.

w = capacidade dos veículos.

Resultados: Rotas dos veículos apoiadas nos CA.

Passo 1. Construir grupos de clientes com limite de capacidade.

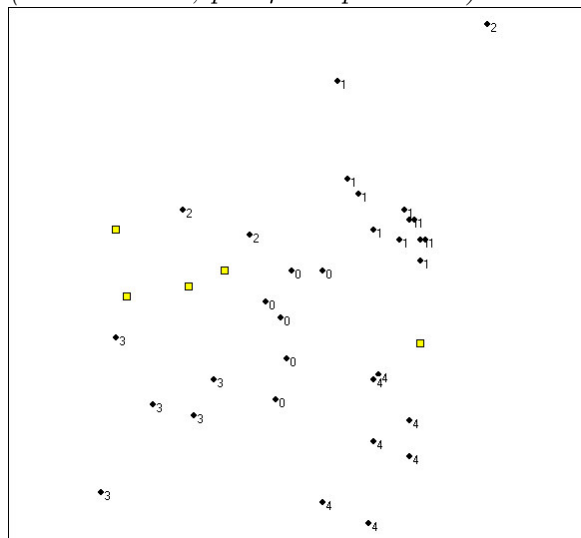
Passo 2. Determinar a rota de distribuição em cada grupo de clientes.

Passo 3. Melhorar as rotas.

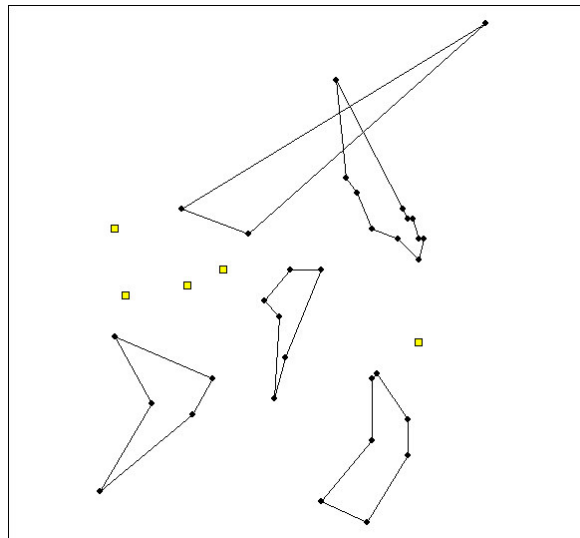
Passo 4. Localizar os CA e afectar-lhes as rotas.

Exemplo 13

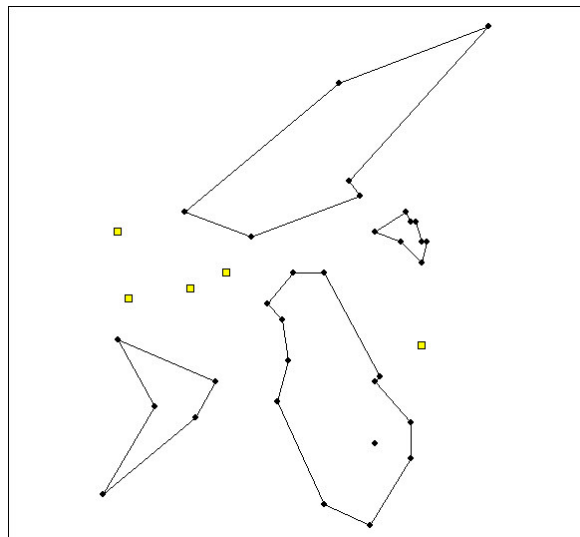
As figuras que se seguem indicam os 4 passos da aplicação do algoritmo 2 à instância 4, Gaskel67-32 \times 5 (ver tabela 7.1, p. 145 e apêndice A).



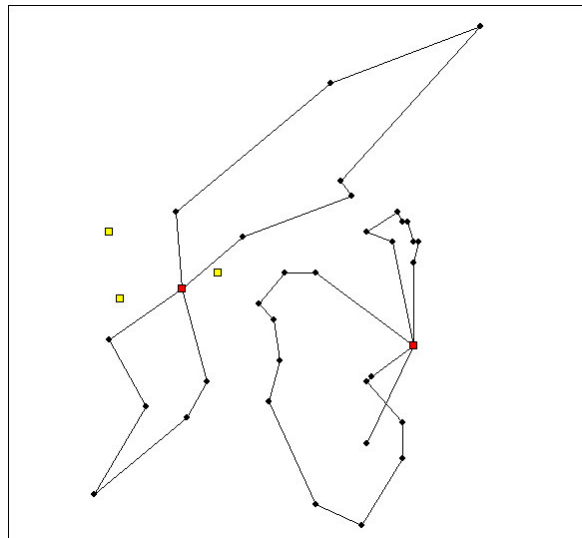
Passo1. Construção de Grupos com limite de capacidade.



Passo 2. Determinação das rotas através dos clientes em cada grupo.



Passo 3. Melhoramento das rotas.



Passo 4. Localização dos CA e afectação das rotas aos CA abertos.

Nas secções seguintes serão exploradas propostas de resolução para cada um dos passos do algoritmo 2.

8.3 Passo1: Construir Grupos com Limite de Capacidade

Tendo em conta que é objectivo deste capítulo investigar a funcionalidade e adequabilidade do uso de métodos de agrupamento, na construção de bons algoritmos, para resolução de PLDC, assumem desde logo uma importância especial as várias propostas de implementação do passo 1 do algoritmo 2. Não existindo uma forma segura de escolha de um qualquer método de agrupamento, é aconselhável experimentar vários na tentativa de avaliar as suas potencialidades.

Segundo Kaufman e Rousseeum [116] (p. 37), *"In such situation⁸ it is probably a good idea to run more than one program and to carefully analyze and compare the resulting classifications, making use of their graphical displays"*.

Perseguindo estes conselhos, para cumprir o passo 1 do algoritmo 2 são propostos quatro métodos distintos baseados na teoria da Análise de Grupos. Os dois primeiros são hierárquicos, os dois últimos são não hierárquicos.

- método hierárquico de uma fase,
- método hierárquico de duas fases,
- método não hierárquico de afectação directa,
- método não hierárquico de afectação sequencial.

⁸Quando os dados permitem a aplicação de vários algoritmos.

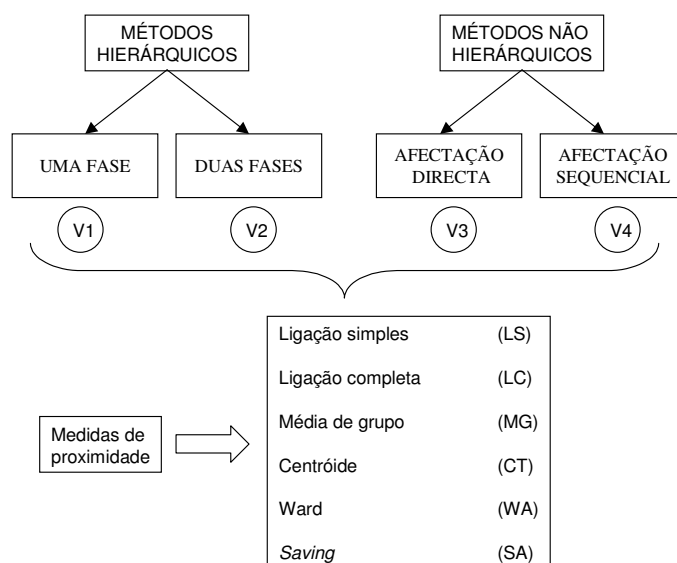


Figura 8.5: Métodos de agrupamento e medidas de proximidade.

Em cada um dos métodos são avaliadas as 6 medidas de proximidade já expostas na tabela 8.1. A aplicação destes 4 métodos para execução do passo 1 do algoritmo 2 conduz a outras tantas versões do algoritmo, que serão designadas pelo nome do método empregue no 1º passo ou então por V1, V2, V3 e V4, respectivamente. As diferentes versões, as iniciais pelas quais serão referenciados e as medidas de proximidade encontram-se sintetizados na figura 8.5.

8.3.1 Métodos Hierárquicos

Na secção 8.1.1 (p. 155) a classificação exclusiva e intrínseca foi dividida em hierárquica e não hierárquica. Nesta secção será dada uma especial atenção à classificação hierárquica.

Os métodos hierárquicos de agrupamento dividem-se em duas grandes classes, os aglomerativos que vão sucessivamente juntando grupos mais pequenos e os divisivos que actuam no sentido contrário, desagregando grupos maiores. Neste trabalho são referidos e estudados métodos hierárquicos aglomerativos, que serão integrados no algoritmo 2 para resolução do passo 1. São métodos que obedecem a um procedimento aglomerativo que consiste na união iterativa dos grupos mais próximos. Inicialmente são formados grupos com um só cliente. Em cada iteração são unidos os dois grupos mais próximos. Caso não exista critério de paragem, o processo termina quando existir um só grupo com todos os clientes.

Vários são os métodos que permitem implementar os procedimentos hierárquicos aglomerativos (daqui em diante apenas designados por métodos hierárquicos). O método da árvore de suporte e o método de Johnson [115] são os mais comuns. O primeiro

propõe a formação dos grupos a partir da árvore de suporte mínima de um grafo [96]. Apresenta como principal desvantagem o facto de suportar somente as medidas de proximidade Ligação Simples e Ligação Completa. O segundo, necessita de armazenar a matriz (triangular) de proximidade entre os grupos mas, em contrapartida, permite o uso de todas as medidas de proximidade testadas neste texto e possibilita ainda uma construção algorítmica bastante similar quer para o caso hierárquico quer para o caso não hierárquico. Anderberg [5] caracteriza as etapas de desenvolvimento de um método hierárquico aglomerativo em 4 passos.

1. Iniciar com n grupos, cada um com exactamente um elemento.
2. Determinar a matriz de proximidade entre os grupos.
3. Unir os dois grupos cuja medida de proximidade é menor.
4. Se existe somente um grupo, terminar. Caso contrário voltar a 2.

Na verdade, ao voltar ao passo 2 não é necessário recalcular na totalidade a matriz de proximidade. As linhas e colunas relativas aos grupos unidos são eliminadas e entra uma nova linha e coluna respeitante ao novo grupo (resultante da união dos anteriores). Os restantes valores mantêm-se inalterados. Há que notar também que os valores correspondentes à nova linha e coluna da matriz de proximidade podem ser calculados recursivamente a partir da matriz corrente, como foi demonstrado por Lance e Williams [125].

Método Hierárquico de Uma Fase

Na ausência de um critério de paragem, os algoritmos hierárquicos conduzem à formação de um só grupo. Em PLDC, onde os grupos de clientes pertencentes à mesma rota admitem capacidade máxima, não é admissível que os grupos sejam consecutivamente unidos uns aos outros. O limite de capacidade impede que assim seja e actuará como critério de paragem natural, permitindo a união dos grupos mais próximos somente no caso de o grupo resultante não exceder o limite de capacidade. Desta forma, o critério de paragem é induzido pela capacidade máxima permitida em cada grupo, não se conhecendo à partida o número de grupos a formar. Trata-se de resolver um difícil e bem conhecido problema da Análise de Grupos habitualmente designado por Problema de Agrupamento com Capacidade⁹ [161][1][74].

O algoritmo seguinte conduz à construção directa de grupos com limite de capacidade permitindo cumprir o passo 1 do algoritmo 2.

⁹Tradução da designação em inglês, *Capacitated Clustering Problem*.

Algoritmo 3 *Agrupamento Hierárquico de Uma Fase*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

$w =$ capacidade dos veículos.

Resultados: $G = \{G_1, G_2, \dots, G_r : \text{Cap}(G_l) \leq w, l = 1, 2, \dots, r\}$ grupos de clientes com limite de capacidade.

Passo 1. *Inicialização*

- a) Construir n grupos com um único cliente, $G = \{G_i : G_i = \{i\}, i \in N\}$.
- b) Determinar a matriz de proximidade (Prox) entre os grupos.

Passo 2. *Iteração*

- a) Seja $\text{Prox}[i, j]$ a menor entrada da matriz Prox .
- b) **Se** $\text{Prox}[i, j] = \infty$ **então** terminar.
- c) **Se** $\text{Cap}(G_i) + \text{Cap}(G_j) \leq w$ **então**

- c 1) unir os grupos G_i e G_j ,
- c 2) actualizar G e Prox ,
- c 3) voltar a (a).

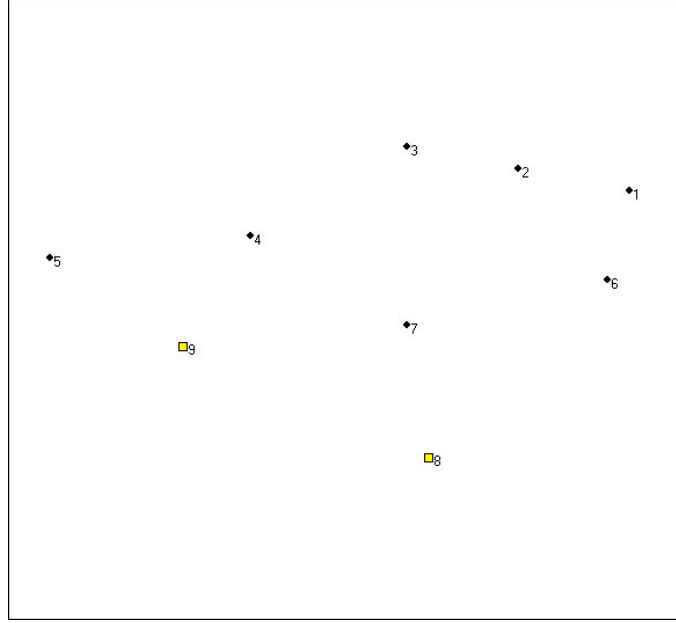
- d) **Se** $\text{Cap}(G_i) + \text{Cap}(G_j) > w$ **então**

- d 1) fazer $\text{Prox}[i, j] = \infty$, evitando a escolha futura dos grupos G_i e G_j ,
- d 2) voltar à alínea (a).

Exemplo 14

Considere-se uma instância do PLDC formada a partir dos primeiros 7 clientes dos ficheiros de dados *Perl83-12x2* (apêndice A), com capacidade dos veículos limitada a 65 unidades de carga. A implementação do passo 1 com base no Algoritmo 3, usando a medida de proximidade *Ligação Simples*, é o objectivo deste exemplo.

A figura indica a representação gráfica dos clientes e dos potenciais CA.



Passo1: $G_1 = \{1\}$, $G_2 = \{2\}$, $G_3 = \{3\}$, $G_4 = \{4\}$, $G_5 = \{5\}$, $G_6 = \{6\}$, $G_7 = \{7\}$.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	Cap
$G_1 = \{1\}$								20
$G_2 = \{2\}$	5, 1							20
$G_3 = \{3\}$	10, 2	5, 1						20
$G_4 = \{4\}$	17, 1	12, 4	8, 1					20
$G_5 = \{5\}$	26, 2	21, 4	16, 9	9				20
$G_6 = \{6\}$	4, 1	6, 4	10, 8	16, 1	25			20
$G_7 = \{7\}$	11, 7	8, 6	8	8, 1	16, 3	9, 2		20

Passo 2: $Prox[6, 1] = 4, 1 \neq \infty$ é a menor entrada em $Prox$. No caso de empate seria escolhida a primeira, por linha e coluna.

$Cap(G_6) + Cap(G_1) = 20 + 20 = 40 \leq 65$ então, unir os grupos G_6 e G_1 , atualizar $Prox$ e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	Cap
$G_1 = \{1, 6\}$							40
$G_2 = \{2\}$	5, 1						20
$G_3 = \{3\}$	10, 2	5, 1					20
$G_4 = \{4\}$	16, 1	12, 4	8, 1				20
$G_5 = \{5\}$	25	21, 4	16, 8	9			20
$G_6 = \{7\}$	9, 2	8, 6	8	8, 1	16, 3		20

$Prox[2, 1] = 5, 1 \neq \infty$ é a menor entrada em $Prox$. Existe empate com a $[3, 2]$, logo é escolhida a primeira, por linha e coluna.

$Cap(G_2) + Cap(G_1) = 20 + 40 = 60 \leq 65$ então, unir os grupos G_2 e G_1 , atualizar

Prox e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	Cap
$G_1 = \{1, 6, 2\}$						60
$G_2 = \{3\}$	5, 1					20
$G_3 = \{4\}$	12, 4	8, 1				20
$G_4 = \{5\}$	21, 4	16, 8	9			20
$G_5 = \{7\}$	8, 6	8	8, 1	16, 3		20

$Prox[2, 1] = 5, 1 \neq \infty$ é a menor entrada em *Prox*.

$Cap(G_2) + Cap(G_1) = 20 + 60 = 80 > 65$ então fazer $Prox[2, 1] = \infty$ e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	Cap
$G_1 = \{1, 6, 2\}$						60
$G_2 = \{3\}$	∞					20
$G_3 = \{4\}$	12, 4	8, 1				20
$G_4 = \{5\}$	21, 4	16, 8	9			20
$G_5 = \{7\}$	8, 6	8	8, 1	16, 3		20

$Prox[5, 2] = 8 \neq \infty$ é a menor entrada em *Prox*.

$Cap(G_5) + Cap(G_2) = 20 + 20 = 40 \leq 65$ então unir os grupos G_5 e G_2 , actualizar *Prox* e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	G_4	Cap
$G_1 = \{1, 6, 2\}$					60
$G_2 = \{3, 7\}$	8, 6				40
$G_3 = \{4\}$	12, 4	8, 1			20
$G_4 = \{5\}$	21, 4	16, 3	9		20

$Prox[3, 2] = 8, 1 \neq \infty$ é a menor entrada em *Prox*.

$Cap(G_3) + Cap(G_2) = 20 + 40 = 60 \leq 65$ então unir os grupos G_3 e G_2 , actualizar *Prox* e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	Cap
$G_1 = \{1, 6, 2\}$				60
$G_2 = \{3, 7, 4\}$	8, 6			60
$G_3 = \{5\}$	21, 4	9		20

$Prox[2, 1] = 8, 6 \neq \infty$ é a menor entrada em *Prox*.

$Cap(G_2) + Cap(G_1) = 60 + 60 = 120 > 65$ então fazer $Prox[2, 1] = \infty$ e voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	Cap
$G_1 = \{1, 6, 2\}$				60
$G_2 = \{3, 7, 4\}$	∞			60
$G_3 = \{5\}$	21, 4	9		20

$Prox[3, 2] = 9 \neq \infty$ é a menor entrada em *Prox*.

$Cap(G_3) + Cap(G_2) = 20 + 60 = 80 > 65$ então fazer $Prox[3, 2] = \infty$ e voltar ao início do passo 2.

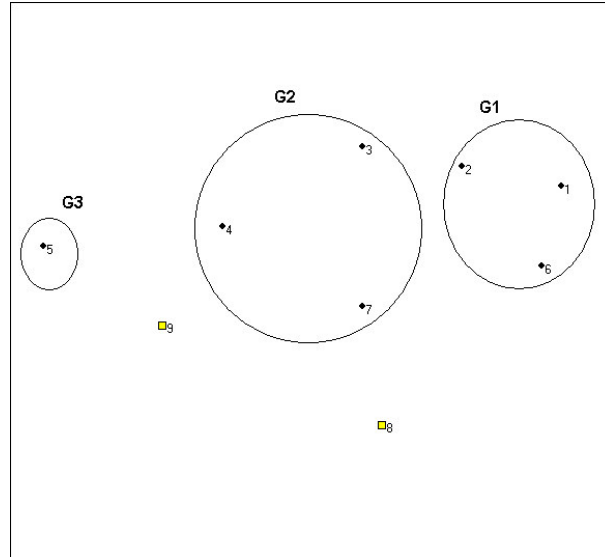
	G_1	G_2	G_3	Cap
$Prox = G_1 = \{1, 6, 2\}$				60
$G_2 = \{3, 7, 4\}$	∞			60
$G_3 = \{5\}$	21, 4	∞		20

$Prox[3, 1] = 21, 4 \neq \infty$ é a menor entrada em $Prox$.

$Cap(G_3) + Cap(G_1) = 20 + 60 = 80 > 65$ então $Prox[3, 1] = \infty$, voltar ao início do passo 2.

	G_1	G_2	G_3	Cap
$Prox = G_1 = \{1, 6, 2\}$				60
$G_2 = \{3, 7, 4\}$	∞			60
$G_3 = \{5\}$	∞	∞		20

$Prox[2, 1] = \infty$ é a menor entrada em $Prox$. Terminar.



A este algoritmo podem ser adaptadas todas as medidas de proximidade ilustradas na tabela 8.1, bastando para isso ajustar o cálculo inicial da matriz de proximidade $Prox$ e a sua actualização na parte iterativa.

A construção de grupos com capacidade limitada admite um contratempo difícil de contornar. Na parte final do processo os grupos vão atingindo o seu limite de capacidade, impedindo a união dos grupos mais próximos pelo simples facto do grupo resultante exceder a capacidade permitida. Por este motivo surge muitas vezes a união de grupos afastados, como se pode observar na 1ª ou 2ª figura correspondente ao exemplo 13 (p. 165), provocando o designado efeito de *biased*. Na secção 8.3.3 este assunto será mais aprofundado.

Método Hierárquico de Duas Fases

O método hierárquico de duas fases proposto nesta secção tem uma forma de actuação algo diferente do anterior. Numa primeira fase, é aplicado o método hierárquico sem restrições de capacidade, deixando construir livremente um determinado número de grupos. Sem impor restrições de capacidade elimina-se o indesejável efeito de *biased*.

Conhecendo as encomendas dos clientes (e_i) e a capacidade máxima de cada grupo (w) (tendo em conta que cada grupo será servido por um só veículo) pode-se determinar o número mínimo de grupos (r).

$$r = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{w} \right\rceil$$

De seguida, é aplicado o método de agrupamento hierárquico, formando livremente r grupos. Desta vez o critério de paragem não é induzido pela capacidade limitada, mas sim pelo número exacto de grupos a formar.

A ausência de restrição relativa ao limite de capacidade conduz provavelmente à formação de grupos que a violam. É o momento para passar à segunda fase que tem por fim a reposição dos limites de capacidade em cada grupo. Para o efeito foi construído um procedimento que permite a transferência de clientes dos grupos com capacidade excessiva para grupos que os possam receber sem exceder a capacidade. Contudo, se não for garantido que os clientes são transferidos somente para grupos próximos, este procedimento poderá inutilizar ou transfigurar os grupos conseguidos na fase anterior, perdendo-se as verdadeiras características e potencialidades do método de agrupamento usado na primeira fase. Para manter o mais possível a estrutura dos grupos inicialmente formados, são impostas duas condições à transferência de clientes entre grupos:

Condição 1. O grupo que recebe não excede a capacidade.

Condição 2. O grupo que recebe está suficientemente próximo.

A primeira condição pode ser verificada com facilidade. Já o mesmo não se pode afirmar da segunda. Como detectar se o grupo que recebe está suficientemente próximo do cliente candidato à transferência?

As medidas de proximidade entre clientes/grupos são absolutas e como tal dependem da distribuição espacial dos clientes/grupos. Estar próximo pode significar estar a vários metros ou dezenas de quilómetros. Mesmo usando o mesmo enquadramento espacial, a densidade de clientes influencia o conceito de proximidade.

É necessário encontrar uma medida relativa de proximidade entre um cliente e um grupo, independente da distribuição espacial dos clientes. As definições que se seguem desenvolvem a noção de peso interno e peso externo proposta por Barreto [11] e conduzem a uma medida relativa de proximidade.

Definição 10

Seja G_l um grupo de clientes no plano. Seja $i \in G_l$ um cliente desse grupo. Define-se **Peso Interno** do cliente i como sendo a medida da proximidade entre o cliente e o grupo a que pertence. Representa-se por $PesoInt(i, G_l)$.

$$PesoInt(i, G_l) = Prox(i, G_l \setminus \{i\})$$

Definição 11

Sejam G_l e G_m dois grupos de clientes no plano tais que $G_m \neq G_l$. Seja $i \in G_l$ um cliente. Define-se **Peso Externo** do cliente i relativamente ao grupo externo G_m como sendo a medida da proximidade entre o cliente i e o grupo externo G_m . Representa-se por $PesoExt(i, G_m)$.

$$PesoExt(i, G_m) = Prox(i, G_m)$$

Definição 12

Sejam G_l e G_m dois grupos de clientes no plano tais que $G_m \neq G_l$. Seja $i \in G_l$ um cliente. Define-se **Peso Relativo** do cliente i relativamente ao grupo externo G_m como sendo.

$$PesoR(i, G_m) = \frac{PesoExt(i, G_m)}{PesoInt(i, G_l)}$$

Definição 13

Seja $G = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}$ um conjunto constituído por grupos no plano. Seja $i \in G_l \in G$. Define-se **Coefficiente de Proximidade** do cliente i como sendo

$$\rho_{prox}(i, G_t) = \min_{G_j \in G \setminus G_l} PesoR(i, G_j)$$

O grupo externo G_t é o que se encontra relativamente mais próximo do cliente i .

O coeficiente de proximidade é uma medida relativa, independente da distribuição espacial dos clientes, que traduz o grau de proximidade de um cliente face aos demais grupos. No caso do Peso Externo ser não negativo e o Peso Interno positivo, decorre da definição do coeficiente de proximidade que:

1. $\rho_{prox}(i, G_t) \geq 0$.
2. Se $\rho_{prox}(i, G_t) > 1$, a transferência do cliente i pode contribuir para a diminuição da coesão interna nos grupos alterados.
3. Se $\rho_{prox}(i, G_t) = 1$, a transferência do cliente i mantém a coesão interna nos grupos alterados.
4. Se $\rho_{prox}(i, G_t) < 1$, a transferência do cliente i pode contribuir para o aumento da coesão nos grupos alterados.

À partida, se os grupos foram formados com base numa determinada medida de proximidade, é lícito esperar que, para a maior parte dos clientes, $\rho_{prox}(i, G_t) > 1$. O que significa que o cliente pertence ao grupo que permite obter uma maior homogeneidade interna (com base na medida de proximidade usada). Mas, nem sempre assim é; por exemplo, ao juntar dois grupos, como acontece nos métodos hierárquicos, muitos clientes são arrastados nessa união sem um teste específico à sua real proximidade.

Na posse desta ferramenta de avaliação da proximidade relativa entre um cliente e os restantes grupos, é agora possível construir um procedimento que, numa segunda fase, actualize e corrija os grupos com capacidade excessiva.

Algoritmo 4 *Agrupamento Hierárquico de Duas Fases (1ª Proposta)*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

$w =$ capacidade dos veículos.

$\Delta =$ limite superior do coeficiente de proximidade.

Resultados: $G = \{G_l : Cap(G_l) \leq w, l = 1, 2, \dots, r\}$ grupos de clientes com limite de capacidade.

Passo 1. Inicialização

Determinar o número mínimo de grupos, $r = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{w} \right\rceil$

Passo 2. Iteração

- a) Construir r grupos, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}$, por aplicação de um algoritmo hierárquico de agrupamento.
- b) Se os grupos cumprem o limite de capacidade, terminar.
- c) Seja $H = \{G_1, G_2, \dots, G_z\}$ o conjunto dos grupos de clientes com excesso de capacidade.
- d) Considere-se, em H , o cliente j e o grupo externo G_s tais que:

$$\rho_{prox}(j, G_s) = \min_{i \in H} \rho_{prox}(i, G_t) \quad \wedge \quad Cap(G_s) + e_j \leq w$$

- e) **Se** $\rho_{prox}(j, G_s)$ não existe ou $\rho_{prox}(j, G_s) > \Delta$ **então** fazer $r = t + 1$ e voltar a (a).

- f) **Se** $\rho_{prox}(j, G_s) \leq \Delta$ **então**

f 1) transferir o cliente j ,

- f 2) actualizar G ,*
- f 3) actualizar a matriz de proximidade entre todos os clientes e os dois grupos alterados,*
- f 4) voltar a (b).*

Ao não permitir que um cliente deixe um grupo a qualquer preço, esta proposta de algoritmo assume o controlo das transferências de clientes entre grupos. Em cada iteração podem restar grupos em que não foi possível cumprir a capacidade (alínea e do passo 2). A estes grupos é novamente aplicada a heurística de agrupamento com a possibilidade de construir um grupo suplementar. Garante-se desta forma a convergência do método.

Apesar de restringir com eficácia a transferência de clientes, pugnando para que não sejam transferidos para grupos afastados, corre o risco de promover uma proliferação de grupos, especialmente se Δ for pequeno.

Em instâncias com poucos clientes, um valor $\Delta = 1,5$ pode conduzir a boas soluções de agrupamento¹⁰ com a introdução de mais um ou dois grupos. Nestes casos é razoável admitir que um cliente só pode ser transferido de grupo se o peso externo for, no máximo, 1,5 vezes superior ao peso interno, eliminando a possibilidade de o transferir para um grupo muito afastado do grupo a que pertence.

Em instâncias maiores, como por exemplo as 13 ou 14 (Perl83-318x4), em que são formados muitos grupos, é necessário alargar substancialmente o valor de Δ para não forçar a criação de grupos adicionais em número exagerado e desta forma desvirtuar a solução final do PLDC.

Mas, afinal, qual o valor de Δ mais adequado para cada instância ?

Para esta pergunta não existe, pelo menos por enquanto, uma resposta concreta. Depende da instância e também dos objectivos. No caso presente de aplicação ao PLDC, a criação de grupos desnecessários, nem que seja um só, conduz inevitavelmente a piores soluções do problema. Neste sentido, é fundamental que sejam criados somente os grupos indispensáveis ao cumprimento das restrições de capacidade, existindo um cuidado redobrado na escolha de Δ . Um valor pouco adequado de Δ pode deitar por terra a eficiência de todo o algoritmo.

Tendo em conta a dificuldade em definir com rigor quais os valores mais apropriados para Δ e os riscos que advêm de um uso incorrecto deste limite superior para o coeficiente de proximidade, é elaborada uma nova proposta algorítmica que continua a fazer uso do coeficiente de proximidade, mas sem o limitar superiormente.

¹⁰Tendo em conta alguns resultados experimentais.

Algoritmo 5 *Agrupamento Hierárquico de Duas Fases (2ª proposta)*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

$w = \text{capacidade dos veículos}$.

Resultados: $G = \{G_l : \text{Cap}(G_l) \leq w, l = 1, 2, \dots, r\}$ grupos de clientes com limite de capacidade.

Passo 1. Inicialização

- a) Determinar o número mínimo de grupos, $r = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{w} \right\rceil$

Passo 2. Iteração

- a) Construir r grupos, $G = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}$, por aplicação de um algoritmo hierárquico de agrupamento.
- b) Se os grupos cumprem o limite de capacidade, terminar.
- c) Seja $H = \{G_1, G_2, \dots, G_z\}$ o conjunto dos grupos de clientes com excesso de capacidade.
- d) Considere-se, em H , o cliente j e o grupo externo G_s tais que:

$$\rho_{\text{prox}}(j, G_s) = \min_{i \in H} \rho_{\text{prox}}(i, G_t) \quad \wedge \quad \text{Cap}(G_s) + e_j \leq w$$

- e) **Se** $\rho_{\text{prox}}(j, G_s)$ não existe **então** fazer $r = r + 1$ e voltar a (a).

- f) **Se** $\rho_{\text{prox}}(j, G_s)$ existe **então**

- f 1) transferir o cliente j ,
- f 2) actualizar G ,
- f 3) actualizar a matriz de proximidade entre todos os clientes e os dois grupos alterados,
- f 4) voltar a (b).

Este algoritmo difere do anterior na medida em que transfere sempre o cliente com menor coeficiente de proximidade, não efectuando qualquer juízo de avaliação sobre a grandeza do coeficiente. Evidentemente, corre o risco de transferir clientes para grupos muito afastados mas, em contrapartida, só é criado um novo grupo se não for possível cumprir os limites de capacidade com o número de grupos existente. Garante-se desta forma o estabelecimento do número mínimo de grupos, uma condição indispensável à obtenção de boas soluções do PLDC.

Exemplo 15

Considere-se novamente uma instância constituída pelos primeiros 7 clientes do ficheiro de dados Perl83-12×2 (apêndice A) com capacidade dos veículos limitada a 65 unidades de carga. A representação gráfica dos clientes e dos potenciais CA é indicada no exemplo 14. Neste exemplo aplica-se o Algoritmo 5, usando a medida de proximidade Ligação Completa.

Passo1: O número mínimo de grupos é $r = \lceil \frac{20+20+\dots+20}{65} \rceil = \lceil \frac{140}{65} \rceil = 3$

Passo2: A aplicação de um algoritmo hierárquico com medida de proximidade Ligação Completa conduz à formação dos $r = 3$ grupos $G = \{\{1, 6, 2, 3\}, \{4, 7\}, \{5\}\}$.

$H = \{\{1, 6, 2, 3\}\}$ Grupo com excesso de capacidade.

$G = \{\{4, 7\}, \{5\}\}$ Grupos sem excesso de capacidade.

$\rho(1, G_2) = \frac{17,1172}{10,1980} = 1,678$; $\rho(6, G_2) = \frac{16,1245}{10,8166} = 1,491$; $\rho(2, G_2) = \frac{12,3693}{6,4031} = 1,932$; $\rho(3, G_2) = \frac{8,0623}{10,8166} = 0,745$. O cliente 3 é transferido uma vez que $\rho(3, G_2)$ é o menor e $Cap(G_2) + e_3 = 40 + 20 \leq w = 65$.

$G = \{\{1, 6, 2\}, \{4, 7, 3\}, \{5\}\}$

Os grupos cumprem o limite de capacidade, terminar.

O coeficiente de proximidade de cada cliente pertencente ao grupo com excesso de capacidade é determinado com base na proximidade externa relativa aos grupos que o podem receber. Por exemplo, para o cliente 3,

$PesoInt(3) = 8,0623$ é a distância ao cliente 2 do seu grupo.

$PesoExt(3, \{4, 7\}) = 10,8166$ é a distância ao grupo externo $\{4, 7\}$ que o pode receber sem exceder a sua capacidade.

$PesoExt(3, \{5\}) = 26,1725$ é a distância ao grupo externo $\{5\}$ que o pode receber sem exceder a sua capacidade.

Sendo assim, $\rho(3, G_2) = 0,745$ é o menor.

8.3.2 Métodos Não Hierárquicos

Enquanto que os métodos hierárquicos partem de um conjunto de grupos com um único elemento e, por um processo de sucessivos encaixes, caminham em direcção à construção de um só grupo, os métodos não hierárquicos são desenhados para construir r grupos, em que r é conhecido *a priori* ou é determinado como parte do método. Um método de agrupamento não hierárquico convergente pode ser implementado através da seguinte sequência de dois passos:

1. Formar r grupos, cada um com um cliente fonte. Designar por clientes livres os que ainda não foram afectados a qualquer grupo.
2. Afectar cada cliente livre ao grupo mais próximo.

Embora estes dois passos sintetizem as etapas principais dos métodos não hierárquicos, há que ajustar ainda alguns procedimentos para que os grupos assim formados

possam ser aplicados na construção de soluções para o PLDC. Desde logo, há que ter em conta a necessidade de construir grupos com capacidade limitada, o que condicionará sempre a deslocação de elementos entre grupos.

Método não Hierárquico de Afectação Directa

No método não hierárquico de afectação directa, cada vértice livre é afectado directamente ao grupo cujo vértice fonte se encontra mais próximo, desde que o grupo o possa receber sem exceder a capacidade. O algoritmo que se segue permite a construção directa de grupos de capacidade limitada.

Algoritmo 6 *Agrupamento Não Hierárquico de Afectação Directa*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

$w =$ capacidade dos veículos.

Resultados: $G = \{G_l : \text{Cap}(G_l) \leq w, l = 1, 2, \dots, r\}$ grupos de clientes com limite de capacidade.

Passo 1. Inicialização

- a) Seja $H = N$ o conjunto dos clientes livres (ainda não afectados).
- b) Seja $G = \emptyset$.

Passo 2. Iteração

- a) Determinar o número mínimo de grupos em H , $r = \left\lceil \frac{\sum_{i \in H} e_i}{w} \right\rceil$.
- b) Formar r grupos $F = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}$ em H , cada um com um elemento, designado por cliente fonte.
- c) $H = H - F$.
- d) Afectar cada vértice livre ao grupo cujo cliente fonte se encontra mais próximo, desde que não seja ultrapassada a capacidade do grupo. Actualizar F e H .
- e) Fazer $G = G \cup F$.
- f) Se $H = \emptyset$ terminar, caso contrário voltar a (a).

Exemplo 16

Considere-se novamente a instância do exemplo 14 (p. 170). Neste exemplo aplica-se o Algoritmo 6, usando a medida de proximidade *Ligação Simples*.

Passo1: Seja $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $G = \emptyset$.

Passo 2: $r = \lceil \frac{20+20+\dots+20}{65} \rceil = \lceil \frac{140}{65} \rceil = 3$.

Os clientes fonte devem ser encontrados na periferia do conjunto de clientes, diminuindo desta forma o risco de efeito biased. Se assim não acontecer, são formados grupos centrais saturados¹¹ e, no final, os clientes livres na fronteira não poderão ser integrados ao centro e terão de juntar-se a grupos mais longínquos.

Para determinar os 3 clientes fonte procede-se do seguinte modo:

Escolher um cliente i aleatoriamente. Por exemplo, $i = 7$.

5 é o cliente mais afastado de 7 e será o primeiro cliente fonte.

$F = \{\{5\}\}$ e $H = H - F = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$.

O cliente de H mais afastado de F é o 1 e será o próximo cliente fonte.

$F = \{\{5\}, \{1\}\}$ e $H = H - F = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.

O cliente de H mais afastado de F é o 7 e será o próximo cliente fonte.

$F = \{\{5\}, \{1\}, \{7\}\}$, estão encontrados os 3 clientes fonte.

$H = H - F = \{2, 3, 4, 6\}$

Os restantes clientes são afectados ao grupo cujo cliente fonte se encontra mais próximo desde que este os possa receber sem exceder a capacidade.

$F = \{\{5\}, \{1, 6, 2\}, \{7, 3, 4\}\}$

$G = F$

$H = \emptyset$, terminar.

Método não Hierárquico de Afectação Sequencial

No algoritmo anterior, a responsabilidade de captação de clientes para o grupo é atribuída por inteiro ao seu cliente fonte. Os restantes elementos do grupo não contribuem para este efeito de atracção gravítico. No algoritmo que se propõe nesta secção, os clientes livres são afectados ao grupo mais próximo, centrando de novo a responsabilidade de atracção de novos clientes em todo o grupo e não num único cliente. Por causa desta diferença é necessário recalcular, em cada iteração, a proximidade entre os clientes livres e os grupos entretanto alterados.

Algoritmo 7 Agrupamento Não Hierárquico de Afectação Sequencial

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$, clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

$w = \text{capacidade dos veículos}$.

¹¹ Com capacidade próxima do limite.

Resultados: $G = \{G_l : \text{Cap}(G_l) \leq w, l = 1, 2, \dots, r\}$ grupos de clientes com limite de capacidade.

Passo 1. Inicialização

- a) Seja $H = N$ o conjunto dos clientes livres (ainda não afectados).
- b) Seja $G = \emptyset$.

Passo 2. Iteração

- a) Determinar o do número mínimo de grupos em H , $r = \left\lceil \frac{\sum_{i \in H} e_i}{w} \right\rceil$.
- b) Formar r grupos $F = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}$ em H , cada um com um elemento.
- c) $H = H - F$.
- d) Seja $i \in H$ o cliente livre mais próximo do grupo $G_s \in F$, tal que $\text{Cap}(G_s) + e_i \leq w$.
 - d 1) afectar i ao grupo mais próximo,
 - d 2) actualizar F e H ,
 - d 3) voltar à alínea d) enquanto existir um cliente i cumprindo as condições.
- f) Fazer $G = G \cup F$.
- g) Se $H = \emptyset$ terminar, caso contrário voltar a (a).

Exemplo 17

Considere-se ainda a instância do exemplo 14 (p. 170) à qual se aplica o Algoritmo 7, usando a medida de proximidade Ligação Simples.

Passo 1: Seja $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $G = \emptyset$.

Passo 2: $r = \left\lceil \frac{20+20+\dots+20}{65} \right\rceil = \left\lceil \frac{140}{65} \right\rceil = 3$

Tal como no algoritmo anterior, os clientes iniciais dos grupos são periféricos e o mais afastados uns dos outros possível.

Escolher um cliente i aleatoriamente. Por exemplo, $i = 7$.

Então $F = \{\{5\}, \{1\}, \{7\}\}$, são os três grupos iniciais.

$H = H - F = \{2, 3, 4, 6\}$

Os restantes clientes (pertencentes a H) são afectados iterativamente ao grupo mais próximo desde que este os possa receber sem exceder a capacidade.

O cliente 6 é o mais próximo de $G_2 = \{1\}$. Afectar 6 a G_2 com $F = \{\{5\}, \{1, 6\}, \{7\}\}$ e $H = H - F = \{2, 3, 4\}$.

O cliente 2 é o mais próximo de $G_2 = \{1, 6\}$. Afectar 2 a G_2 com $F = \{\{5\}, \{1, 6, 2\}, \{7\}\}$ e $H = H - F = \{3, 4\}$.

O cliente 3 é o mais próximo de G_2 mas G_2 está saturado.

O cliente 3 é o mais próximo de $G_3 = \{7\}$. Afectar 3 a G_3 com $F = \{\{5\}, \{1, 6, 2\}, \{7, 3\}\}$ e $H = H - F = \{4\}$.

O cliente 4 é o mais próximo de $G_3 = \{7, 3\}$. Afectar 4 a G_3 com $F = \{\{5\}, \{1, 6, 2\}, \{7, 3, 4\}\}$ e $H = H - F = \{\}$.

Não existe qualquer cliente para afectar.

$G = G \cup F = \{\{5\}, \{1, 6, 2\}, \{7, 3, 4\}\}$.

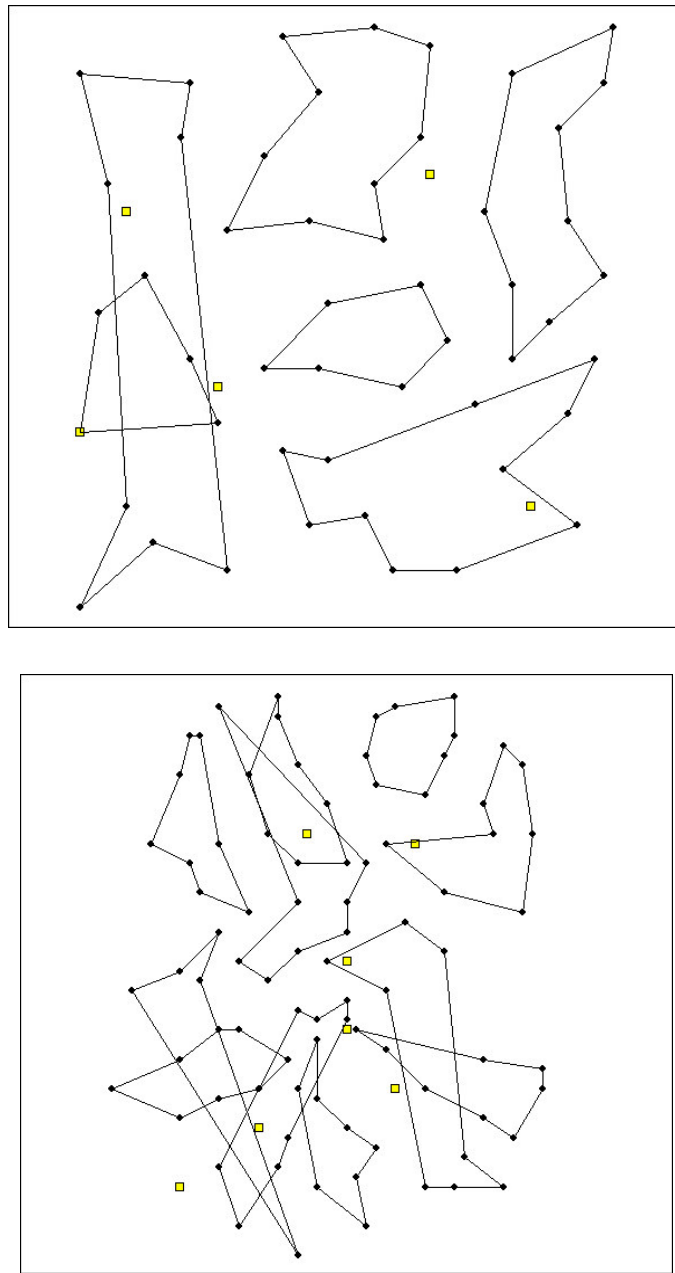
$H = \emptyset$, *terminar.*

8.3.3 Efeito de *Biased*

Os algoritmos de agrupamento apresentados (algoritmos 3, 5, 6 e 7) funcionam em geral bastante bem, como se poderá comprovar mais tarde com a exposição pormenorizada dos resultados computacionais mas, como todos os algoritmos de agrupamento com capacidade, apresentam uma limitação. À medida que os grupos vão ficando saturados (com a capacidade próxima do limite) é cada vez mais difícil admitirem novas uniões entre si (métodos hierárquicos) ou a recepção de novos elementos (métodos não hierárquicos). Mesmo os clientes muito próximos, claramente na esfera de um determinado grupo, poderão cair noutro grupo longínquo se o seu vizinho estiver saturado. No final do processo acontece frequentemente a união de grupos bastante afastados, uma vez que os que lhes estão próximos já se encontram saturados. Este efeito indesejável, apelidado por Klose [118] de *biased*, tem sido relatado por outros autores que se têm dedicado à investigação deste tipo de problema [161][1].

Exemplo 18

As figuras que se seguem ilustram dois exemplos de agrupamento em que é visível o efeito de biased. Trata-se das instâncias 7 (Christofides69-50×5) e 12 (Perl83-85×7). À primeira foi aplicado o algoritmo 3, hierárquico de uma fase, com a medida de proximidade Centróide. À segunda o algoritmo 7, não hierárquico de afectação sequencial, com a medida de proximidade Média de Grupo. Em ambos os casos está bem presente o efeito de biased. O traçado das rotas tem por fim facilitar identificação dos grupos e realçar a união de grupos ou clientes afastados devido à saturação dos mais próximos.



Mulvey e Beck [161] propuseram um procedimento para eliminar ou atenuar o efeito *biased*. Segundo os autores, a solução do problema reside em proceder à união dos grupos que ficarão numa situação de maior isolamento caso não sejam de imediato unidos. Parece ser uma excelente ideia e, para a pôr em prática, é apenas necessário determinar qual o grupo que mais perde pela não união imediata. Desta forma, calculam a perda de oportunidade em cada grupo e escolhem para unir, no passo seguinte, o grupo com maior perda de oportunidade. Conseguem isso substituindo o passo 2 do algoritmo 3 pelo seguinte:

Passo 2'. Iteração

- a) Para cada grupo $G_l \in G$ identificar os dois mais próximo, G_{l1} e G_{l2} .

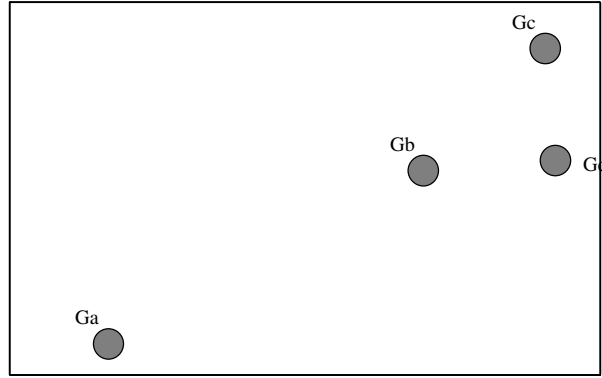
Seja $G_i = \max_{l=1, \dots, r} Prox(G_{l1}, G_{l2})$ e G_j o mais próximo de G_i .

- b), c), d) sem alteração, tendo em conta que a matriz $Prox$ é simétrica.

Na verdade o método de Mulvey conduz à eliminação de algum efeito de *biased* mas não na totalidade, conduzindo por vezes a soluções enviezadas como mostra o exemplo seguinte. A implementação computacional deste método mostrou resultados pouco encorajadores e desta forma foi abandonado, remetendo para o futuro uma investigação mais pormenorizada das suas potencialidades.

Exemplo 19

Considere-se por hipótese que, dos 4 grupos da figura seguinte, 3 podem ser unidos sem exceder a capacidade máxima permitida. De imediato é possível identificar um agrupamento natural constituído pelos grupos mais próximos, G_b , G_c e G_d .



Vejamos o que acontece ao aplicar a técnica de Mulvey.

Os dois mais próximos de G_a são $G_{a1} = G_b$ e $G_{a2} = G_d$.

Os dois mais próximos de G_b são $G_{b1} = G_d$ e $G_{b2} = G_c$.

Os dois mais próximos de G_c são $G_{c1} = G_d$ e $G_{c2} = G_b$.

Os dois mais próximos de G_d são $G_{d1} = G_b$ e $G_{d2} = G_c$.

$\max_{l=a,b,c,d} Prox(G_{l1}, G_{l2}) = Prox(G_{a1}, G_{a2})$. Desta forma, G_a é o que mais perde se não for imediatamente unido a outro grupo e como tal é o próximo a unir.

G_a é unido com o grupo mais próximo, G_b , contrariando a percepção de agrupamento que a figura reflecte e confirmando que o método de Mulvey nem sempre se revela eficaz.

8.4 Passo 2: Determinar as Rotas de Distribuição

Sempre que a dimensão do problema o permita, os passos 2 e 4 do algoritmo 2 são cumpridos com recurso a algoritmos exactos.

No passo 2 as rotas constituem percursos óptimos do Caixeiro Viajante. Em cada grupo é resolvido o PCV tal como formulado na página 120, integrando as restrições 6.1, 6.3, algumas das restrições 6.2 (as que eliminam sub-ciclos com 3 clientes) e relaxando as restantes restrições de sub-ciclos. As restrições relaxadas serão introduzidas nas iterações seguintes à medida que forem sendo violadas. Com este procedimento e usando a rotina CPXmipopt¹² é possível resolver "instantaneamente" PCV com 40 clientes¹³.

Apesar de não ser muito comum a construção de rotas com mais de 40 clientes, é necessário contar com esta possibilidade. Se for esse o caso, recorre-se a um procedimento heurístico eficiente que se desenrola em duas fases; a primeira de construção e a segunda de melhoramento. O algoritmo heurístico 8 foi construído a partir dos estudos de Lawler et al. [137] (p. 207ss) que confirmam o método sequencial em dois passos, construção de uma boa solução inicial e melhoramento dessa solução por um processo *3-optimal*, como uma excelente opção para resolução do PCV.

A fase de construção funciona com base num critério de escolha do tipo mais afastado e num critério de inserção do tipo *saving*. Tal como é sugerido por Lawler et al., a medida de proximidade do tipo Ligação Completa (tabela 8.1) (o mais afastado) é bastante adequada para servir de base à escolha do próximo cliente a integrar a rota. Quanto ao critério de inserção, isto é, onde é que o cliente eleito vai ser colocado para integrar a rota, é proposto um procedimento algo distinto do usado Lawler et al., que provou conduzir à obtenção de melhores soluções iniciais do PCV. A figura 8.6 exemplifica os critérios de inserção. Sendo o cliente l o mais afastado da rota corrente é o próximo a entrar para a rota ijk (a). Lawler et al. [137] propõem a sua integração à esquerda ou à direita do cliente mais próximo, neste caso, sendo j o mais próximo de l , a integração faz-se entre jk ou ji , tal como mostra a figura (b). Mas, se o critério de inserção for do tipo *saving*, o cliente l é inserido entre ik (c). Uma opção mais económica, que conduz a soluções iniciais do PCV de muito melhor qualidade.

Na segunda fase, após a obtenção de uma solução inicial do PCV, é aplicado um procedimento de melhoramento a partir de uma pesquisa local do tipo *3-optimal* [51][142][137].

O algoritmo seguinte especifica com mais pormenor como se desenvolve a resolução heurística do PCV.

¹²Disponível no *software* comercial ILOG CPLEX 7.1.

¹³Ou mesmo até 50 clientes se for possível esperar alguns momentos pelo resultado. Tipicamente até 5 segundos.

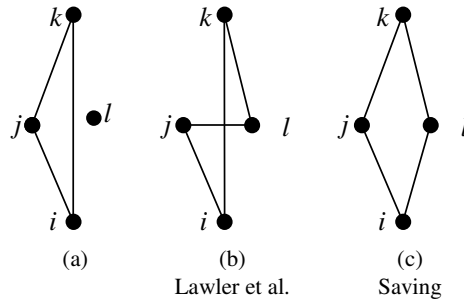


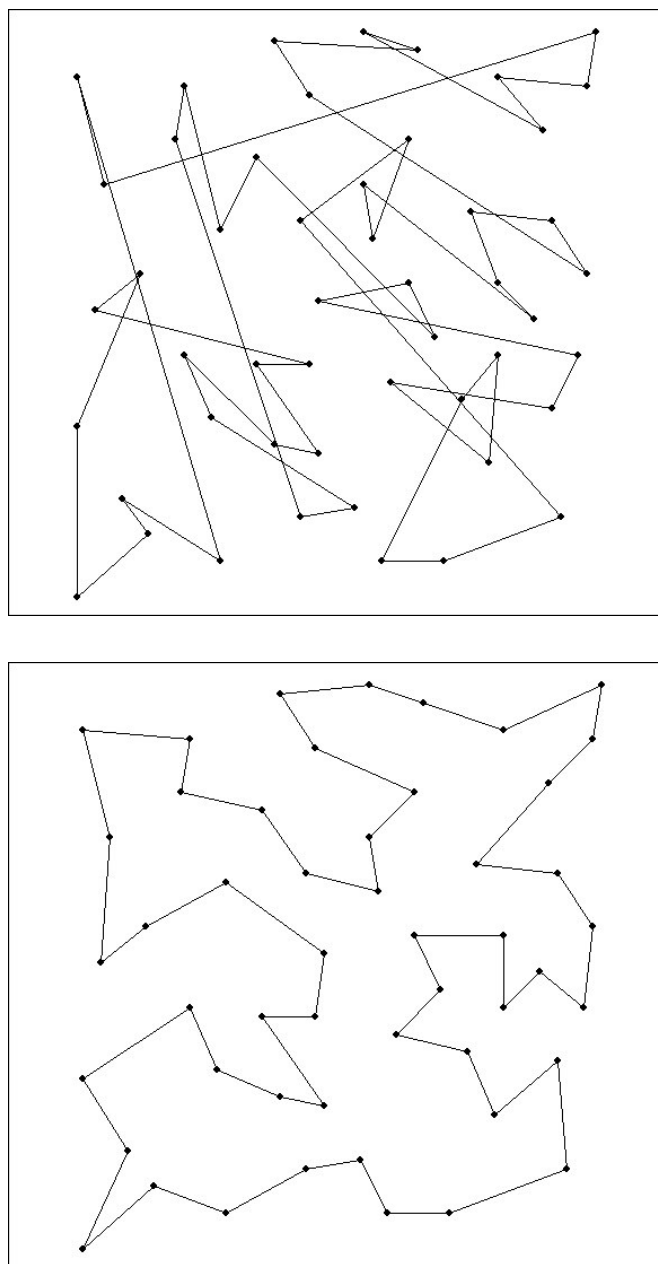
Figura 8.6: Critérios de inserção.

Algoritmo 8 *Resolução heurística do PCV***Dados:** $G = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ grupo de clientes no plano.**Resultados:** Uma solução admissível do PCV em G , representada por Rota.**Passo 1.** Inicialização $Rota = \emptyset$, $Livre = G$.**Passo 2.** Construir uma solução admissível inicial.

- a) Escolher aleatoriamente um cliente $r \in G$.
- b) Seja $i \in Livre$ o cliente mais afastado de r .
- c) Fazer $Rota = Rota \cup \{i\}$. Inserção segundo um critério do tipo saving.
- d) Fazer $Livre = Livre - \{i\}$.
- e) Determinar o cliente $i \in Livre$ mais afastado de Rota.
- f) Se $Livre \neq \emptyset$ voltar a (c).

Passo 3. Melhorar a solução por um processo de pesquisa local do tipo 3-optimal.**Exemplo 20**

Neste exemplo são ilustradas duas aplicação dos passos 1 e 2 do algoritmo 8 ao ficheiro de clientes *Christofides69Cli50×5* (apêndice A). O resultado da primeira figura foi obtido considerando, na alínea c do passo 2, um critério de inserção junto do cliente mais próximo tal como é proposto por Lawler et al. [137]. Na segunda figura foi usado um critério de inserção do tipo saving. As imagens falam por si e não deixam margem para dúvidas quanto à vantagem em usar um critério de inserção do tipo saving.



8.5 Passo 3: Melhorar as Rotas

Na literatura foram já propostas algumas técnicas de melhoramento de soluções admissíveis de PLD.

Chien [43] aplica procedimentos de melhoramento nas rotas considerando os clientes e os CA com uma determinada sequência. Sempre que os estimadores de custo indicam uma melhoria, procede-se à alteração.

Hansen et al. [102] sujeitam a processos de melhoramento as soluções admissíveis construídas a partir de um algoritmo heurístico.

Klose [118] também propõe um processo de melhoramento testando possíveis trocas de clientes entre rotas e um reestimar dos custos.

Nagy e Salhi [164] usam um procedimento de pesquisa local do tipo *tabu search*, para melhorar a solução. Consideram três tipos de movimentos na vizinhança de uma solução, *add*, *drop* e *shift*, calculando o seu custo e adoptando o que propicia um melhoramento maior. Após cada alteração num CA são testados dois procedimentos. No primeiro todos os percursos de distribuição são novamente determinados. No segundo, de forma a acelerar o processo, partem do princípio de que os CA mais afastados e respectivas rotas não sofrem alteração; assim, é aplicado um algoritmo de rotas de veículos somente ao CA em causa, aos CA vizinhos (segundo um esquema de tecelagem de Voroney) e aos respectivos clientes.

Tuzun e Burke [206] aplicam um processo de melhoramento do tipo *2-optimal*.

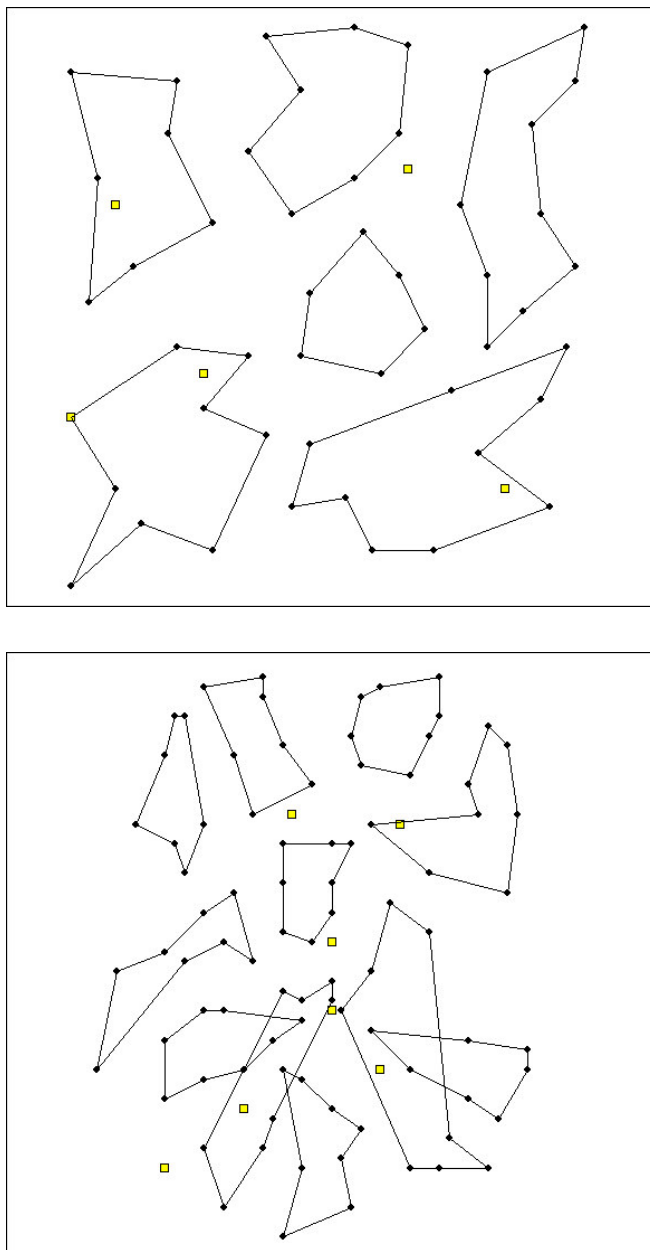
No algoritmo 2 (p. 165) não é contemplado qualquer procedimento para melhoria da solução admissível do PLDC. Em vez disso, no passo 3, após a determinação das rotas em cada grupo, é proposto um procedimento de melhoramento das rotas do tipo *3-optimal* [32]. São testadas todas as trocas possíveis considerando dois arcos de uma rota e um arco de outra rota. Se há melhoria no custo das rotas e a alteração não põe em causa o limite de capacidade das rotas, então é efectuada. O processo termina quando não for possível encontrar mais trocas admissíveis e proveitosas.

Poderá argumentar-se que seria mais interessante aplicar um processo de melhoramento mais tarde, após a localização dos CA, quando fosse conhecida uma solução admissível do PLDC. Na verdade essa opção foi equacionada e mais tarde abandonada em favor da melhoria imediata das rotas, por várias razões. Desde logo a intenção de não perturbar demasiado o algoritmo com procedimentos que possam de alguma forma diluir as diferenças entre os vários métodos de agrupamento (Passo1). Além disso, há que realçar a surpreendente capacidade do método de melhoramento das rotas proposto por Branco e Coelho [32] para eliminar grande parte dos indesejáveis efeitos de *biased*. Segue-se uma melhoria assinalável dos custos das rotas em 16,5% e da solução do PLDC em 25% [14]. Para além de reduzir os custos, contribui também para uniformizar as rotas e desta forma corrigir algumas soluções menos conseguidas no passo 1 [14]. Por último, a dificuldade e complexidade que se reconhece na construção de um algoritmo de melhoramento da solução admissível do PLDC. Estão envolvidos CA que causam um grande embaraço à aplicação de processos de melhoramento, nomeadamente do tipo *3-optimal*.

Exemplo 21

No exemplo 18 foram mostrados dois casos notórios do efeito de *biased* causado pela construção dos grupos com capacidade. As figuras seguintes mostram as mesmas instâncias após a aplicação do passo 3. Pode-se confirmar como a heurística de melhoramento contribui decisivamente para a eliminação de grande parte deste efeito

pernicioso.



8.6 Passo 4: Localizar os CA e Afetar as Rotas.

Após a aplicação do passo 3 estão formadas as rotas que serão seguidas pelos veículos. Para obter uma solução admissível do PLDC resta apenas ligar as rotas aos CA. Para esse efeito, considera-se cada uma das rotas representada por um único ponto com custos de afectação a cada CA determinados por uma função do tipo *saving*. Casillas [39] mostrou que o erro médio de agregação dos clientes, tratando-os como um só, se situa em menos de 5% da optimalidade.

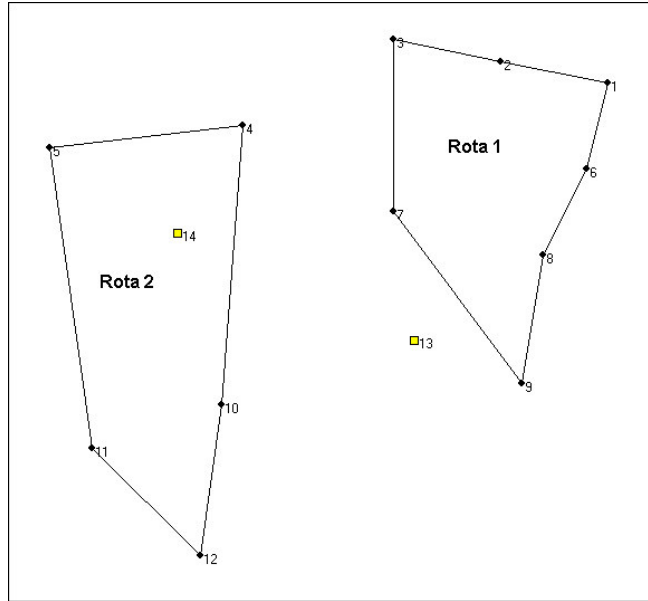
Definição 14

Considere-se a rota R_l . Define-se o custo de afectação da rota R_l ao CA k como sendo,

$$C_{R_l k} = \min_{i,j \in R_l} [d(i, k) + d(j, k) - d(i, j)]$$

Exemplo 22

A aplicação à instância 10 (Perl83-12×2) da versão V1 do algoritmo 2 (obtida por aplicação do método hierárquico de uma fase no passo 1) com a medida de proximidade *Ligação Simples*, conduz às seguintes rotas:



No passo 4, cada rota é vista como se de um só ponto se tratasse e o seu custo de afectação é calculado como indica a definição 14. Sendo assim,

$$C_{R_1 13} = d(9, 13) + d(7, 13) - d(7, 9) = 5,4 + 6,1 - 10,0 = 1,5$$

$$C_{R_1 14} = d(7, 14) + d(3, 14) - d(3, 7) = 13,5 + 10,0 - 8,0 = 15,5$$

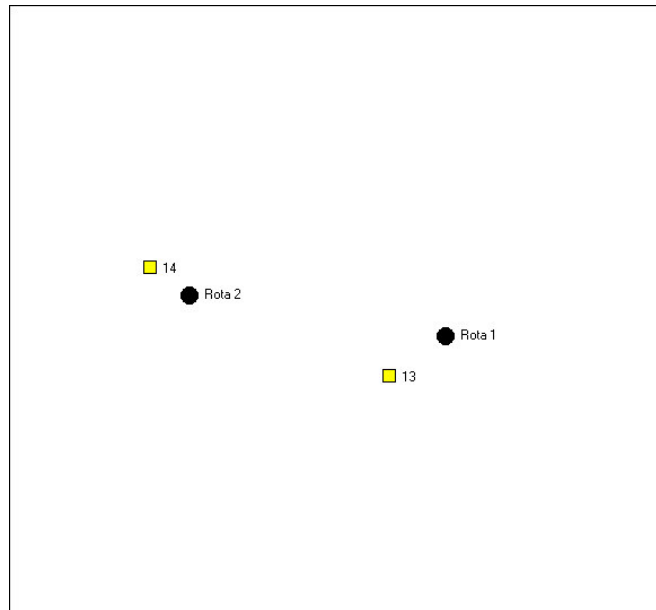
$$C_{R_2 13} = d(10, 13) + d(4, 13) - d(4, 10) = 9,5 + 12,8 - 13,0 = 9,3$$

$$C_{R_2 14} = d(10, 14) + d(4, 14) - d(4, 10) = 8,2 - 5,8 - 13,0 = 1,0$$

Na sua forma matricial os custos são dados por:

	CA13	CA14
Rota1	1,5	15,5
Rota2	9,2	1,0

A figura seguinte mostra uma representação aproximada dos pontos representantes das rotas face aos CA.



Após a contracção das rotas, é resolvido o PLA de custo fixo e uma só fonte de fornecimento para cada cliente [170][2], tal como foi formulado na página 123, tendo sido designado por Problema de Localização-Afectação com Capacidade (PLAC).

Exemplo 23

No caso concreto do problema do exemplo anterior, trata-se de resolver o PLAC que admite a seguinte formulação em programação linear binária¹⁴.

\Problem name: Perl12x2,Passo4

Minimize

obj: $1.47x_1 + 15.50x_2 + 9.25x_3 + 1.04x_4 + 100.00x_5 + 100.00x_6$

Subject To

c1: $x_1 + x_2 = 1$

c2: $x_3 + x_4 = 1$

c3: $140 x_1 + 100 x_3 - 280 x_5 \leq 0$

c4: $140 x_2 + 100 x_4 - 280 x_6 \leq 0$

Binaries

$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$

End.

As variáveis de distribuição são x_1, x_2, x_3 e x_4 . As variáveis de localização são x_5 e x_6 . As primeiras duas restrições garantem que cada rota é afectada a um e um só CA. As restantes duas restrições garantem a instalação efectiva de um CA quando este

¹⁴Mais uma vez é indicada a formulação fornecida pelo software ILOG CPLEX e por isso alguns termos surgem em inglês.

serve de apoio a uma rota. Ao mesmo tempo, zelam para que não seja ultrapassada a capacidade do CA instalado.

Apesar de ser um problema NP-completo, recorrendo à formulação (PLAC) (p. 123) e à rotina de resolução CPXmipopt foi possível resolver todos os PLAC que resultaram da execução das várias versões do algoritmo 2 sobre as 19 instâncias do PLDC.

Conhecida a afectação das rotas aos CA, obtém-se finalmente uma solução admissível do PLDC. Sendo as etapas 2 e 4 resolvidas de forma exacta, não existem outros factores de perturbação para além dos introduzidos pelo próprio método de agrupamento que se desenrola no passo 1 e um certo efeito uniformizante resultante do melhoramento das rotas no passo 3. A aplicação de outros processos de melhoramento da solução admissível do PLDC em presença levaria certamente à diluição das diferenças entre os métodos iniciais de agrupamento e tornaria mais difícil a tarefa de sua avaliação comparativa.

8.7 Avaliação das Heurísticas

Não existe na literatura uma forma genérica e universal de avaliação das heurísticas. São vários os recursos usados pelos investigadores, com as mais variadas justificações [9].

Devido à ausência de um estudo de avaliação de pior caso, Johnson et al. [113] concluem que os métodos heurísticos para o PLD ainda não foram convenientemente avaliados.

Ball e Magazine [9] afirmam que a análise de pior caso não é apropriada para avaliar uma heurística, uma vez que os piores resultados se encontram demasiado soltos (afastados) para serem representativos do comportamento da heurística. Também se referem à análise probabilística para concluir que tende a assumir espaços probabilísticos não realistas. A análise estatística pode também ser um problema quando o óptimo ou uma solução de referência são desconhecidos *a priori*. Sendo assim, a via mais promissora de avaliação das heurísticas é a relaxação.

Segundo Tuzun e Burke [206], não existe uma conclusão definitiva sobre a forma mais adequada para avaliar ou comparar o desempenho dos algoritmos heurísticos. Os problemas têm sempre características particulares que impedem um verdadeiro confronto. A dimensão dos problemas, a distribuição espacial dos clientes e a estrutura das rotas são três das características que podem afectar o desempenho de um algoritmo. Uma heurística pode funcionar na perfeição com um determinado tipo de problemas e revelar dificuldades com outros. Os autores apresentam ainda o que referem como sendo a primeira análise comparativa entre várias heurísticas e referem a necessidade de aprofundar este estudo.

Neste capítulo foi proposto um algoritmo heurístico para resolução do PLDC (algoritmo 2) e sobre ele foram elaboradas 4 versões (V1, V2, V3 e V4) tendo em conta o método de implementação do passo 1 (algoritmos 3, 5, 6 e 7).

Está em causa a avaliação das 4 versões do algoritmo e das 6 medidas de proximidade consideradas na secção 8.1.2 (p. 160). Esta avaliação será conduzida em duas direcções.

Por um lado, será efectuada uma avaliação relativa interna, no sentido de confrontar entre si as várias versões e medidas de proximidade, procurando apontar a/s que mais garantias oferece/m de obtenção de bons resultados.

Numa segunda etapa, proceder-se-á a uma avaliação absoluta da real qualidade das soluções encontradas. Para isso, os resultados serão comparadas com as soluções de referência obtidas na secção 7.3 (p. 149) por aplicação do algoritmo de resolução exacta (algoritmo 1), sejam elas soluções óptimas (quando conhecidas) ou limites inferiores obtidos por relaxação. Desta forma será possível encontrar um intervalo que contém a solução óptima e avaliar o erro cometido. A implementação de um algoritmo sequencial clássico do tipo localização→distribuição permitirá, também, obter resultados de referência que complementam a avaliação do desempenho do algoritmo 2.

8.7.1 Confronto Interno

Nesta secção são colocadas em confronto as 4 versões do algoritmo 2 designadas, de acordo com o método de agrupamento utilizado no passo 1, por:

- V1.** algoritmo hierárquico de uma fase,
- V2.** algoritmo hierárquico de duas fases,
- V3.** algoritmo não hierárquico de afectação directa,
- V4.** algoritmo não hierárquico de afectação sequencial.

Tendo em conta que os passos 2, 3 e 4 são iguais nas quatro versões, o que está verdadeiramente em avaliação são as diferentes formas de agrupamento dos clientes e também, em cada versão, as 6 medidas de proximidade conforme foram descritas na secção 8.1.2.

Para proceder à avaliação das heurísticas foram efectuados testes computacionais sobre as 19 instâncias já apresentadas na tabela 7.1 (p. 145).

As tabelas 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5 ilustram os resultados obtidos nas quatro versões do algoritmo 2. Na tabela 8.4 as colunas relativas às medidas de proximidade LC, MG, CT e SA surgem a branco uma vez que, nesta versão, todas estas medidas se reduzem à medida LS. As células a sombreado indicam o melhor resultado obtido em cada instância no respectivo algoritmo (pode não corresponder à melhor solução heurística encontrada). As iniciais integradas nas tabelas representam o seguinte:

w	= Capacidade dos veículos,
NMR	= Número mínimo de rotas,
NC/R	= Número de clientes por rota,
CR	= Custo das rotas após o Passo 2 (agrupamento e rotas),
CM	= Custo das rotas após o Passo 3 (melhoramento),
CL	= Custo da solução admissível do PLDC (após Passo 4 - localização),
NR	= Número de rotas na solução admissível,
ND	= Número de CA efectivamente instalados,
T	= Tempo (em segundos).

Antes de avançar na avaliação das várias versões do algoritmo 2 e respectivas medidas de proximidade é interessante verificar como varia o custo à medida que se vai aplicando o algoritmo, isto é, custo após o passo 2 (indicado na coluna CR), custo após o passo 3 (indicado na coluna CM) e custo após o passo 4 (indicado na coluna CL).

O gráfico da figura 8.7 ilustra o valor médio do custo após o passo 2 (linha CR), após o passo 3 (linha CM) e após o passo 4 (linha CL). Para viabilizar o cálculo da média foram consideradas somente as instâncias que propiciam resultados da mesma ordem de grandeza, ou seja, da instância 1 à 12 em conjunto com a 17.

A linha CR mostra que, para estas instâncias, os melhores resultados são obtidos com a versão V1.

No geral, o procedimento de melhoramento das rotas permite ganhos de custo médios assinaláveis (linha CM). A capacidade de atenuar os picos de maus resultados que acontecem após a fase de agrupamento já tinha sido relatada, agora, é confirmada pela observação da figura 8.7. A curva CL revela que os melhores resultados são obtidos a partir dos agrupamentos com menor custo, mesmo tendo em conta o benéfico efeito de uniformização atribuído ao passo de melhoramento das rotas. A obtenção de boas soluções do PLDC é potenciada pelo grau de refinamento conseguido na fase inicial que conduz à formação dos grupos de clientes pertencentes à mesma rota.

Para poder apreciar com detalhe os resultados decorrentes dos testes computacionais e retirar algumas conclusões sobre o desempenho de cada versão do algoritmo, é essencial que se estipule o que se entende por bom desempenho e quais as medidas para o avaliar.

Desde logo é considerado um bom algoritmo o que permite alcançar os melhores resultados, ou seja, soluções do PLDC com menor custo. Mas... um algoritmo pode proporcionar uma excelente solução numa instância e revelar um desempenho pobre nas restantes. Se assim acontece, obviamente o seu desempenho não é positivo. Perseguindo este raciocínio, a avaliação dos algoritmos será efectuada tendo em conta as garantias que oferecem quanto à obtenção de boas soluções.

Nesta base de raciocínio, um bom algoritmo heurístico é aquele que coloca frequentemente soluções próximas da melhor solução conhecida, ou seja que

Tabela 8.3: Resultados obtidos com o algoritmo V2.

Algoritmo V2				Medidas de Proximidade																																			
Hierárquico de Duas Fases				Ligação Simples						Ligação Completa						Média de Grupo						Centróide						Ward						Saving					
INSTÂNCIA	w	NMR	NC/R	CR	CM	CL	NR	ND	T	CR	CM	CL	NR	ND	T	CR	CM	CL	NR	ND	T	CR	CM	CL	NR	ND	T	CR	CM	CL	NR	ND	T	CR	CM	CL	NR	ND	T
Gaskell67-21x5	*6000	4	5,25	384	352	491	4	2	1	299	297	436	4	2	0	319	308	444	4	2	0	299	297	436	4	2	0	299	297	436	4	2	0	346	342	471	4	2	0
Gaskell67-22x5	*4500	3	7,33	736	466	591	3	1	0	618	466	591	3	1	0	602	466	591	3	1	0	618	466	591	3	1	0	619	495	604	3	1	0	547	466	591	3	1	0
Gaskell67-29x5	*4500	3	9,66	574	549	624	3	1	0	572	545	616	3	1	0	572	559	637	3	1	0	545	534	614	3	1	0	572	559	636	3	1	0	567	545	616	3	1	0
Gaskell67-32x5	*8000	4	8	516	425	574	4	1	0	423	423	572	4	1	0	472	429	576	4	1	0	431	423	572	4	1	0	474	429	576	4	1	0	510	425	574	4	1	0
Gaskell67-32x5	11000	3	10,67	450	416	523	3	1	0	447	421	540	3	1	0	413	393	511	3	1	0	495	454	560	3	1	0	413	393	511	3	1	0	527	463	574	3	1	0
Gaskell67-36x5	250	4	9	481	377	488	4	1	0	427	368	471	4	1	0	403	377	494	4	1	0	397	368	490	4	1	0	403	377	494	4	1	0	448	377	496	4	1	0
Christofides69-50x5	*160	5	10	599	538	643	5	2	0	488	465	583	5	2	0	470	469	606	5	2	0	544	538	660	5	2	0	522	521	624	5	2	0	638	552	652	5	2	0
Christofides69-75x10	*140	10	7,5	909	852	1070	10	2	0	769	728	949	10	3	0	727	711	970	11	2	0	696	678	968	11	3	0	659	604	886	11	3	0	861	760	1013	10	2	1
Christofides69-100x10	*200	8	12,5	937	753	938	8	3	1	878	762	949	8	2	1	713	695	901	8	2	0	700	668	889	8	2	1	883	776	957	8	2	1	864	701	902	8	2	4
Per63-12x2	*140	2	6	117	93	204	2	1	0	99	93	204	2	1	0	93	93	204	2	1	0	93	93	204	2	1	0	99	93	204	2	1	0	116	93	204	2	1	0
Per63-55x15	*120	10	5,5	395	395	1191	10	3	4	357	351	1137	10	3	4	356	345	1146	10	3	4	360	348	1140	10	3	4	355	337	1136	10	3	48	395	395	1175	10	3	15
Per63-85x7	*180	11	7,27	532	475	1679	11	3	1	460	451	1676	11	3	1	566	521	1728	11	3	1	532	460	1672	11	3	1	451	441	1657	11	3	1	667	517	1725	11	3	2
Per63-318x4	*25000	8	39,75	946618	661279	667862	8	3	104	826298	592668	612059	8	4	69	818951	622495	643637	8	4	49	819679	610648	631212	8	4	54	786129	590445	608482	8	4	115	826446	561777	591526	8	4	531
Per63-318x4	8000	24	13,25	1420234	771703	917278	26	4	91	1073103	573430	747619	28	4	24	1126732	701484	839054	26	4	26	1127411	707417	856883	26	4	22	1228399	679221	818116	26	4	33	1531257	697167	836333	25	4	781
Min62-27x5	2500	4	6,75	3340	2738	3741	4	2	0	2496	2496	3558	4	2	0	2628	2151	3062	4	2	0	2601	2354	3279	4	2	0	2496	2496	3558	4	2	0	2368	2143	3066	4	2	0
Min62-134x8	*850	10	13,4	8998	4656	6371	10	4	2	8447	6380	7936	10	4	2	9167	5267	6700	10	3	2	9307	5662	7184	10	4	2	7947	5772	7361	10	4	2	9087	6327	7893	10	3	13
Daskin65-68x8	9E+06	5	17,6	452	436	575	5	3	5	242	226	389	6	2	1	353	318	472	5	3	5	253	230	406	6	3	1	271	224	425	6	2	2	331	240	467	6	3	8
Daskin65-150x10	8E+06	10	15	41712	33931	54663	10	4	4	36922	36506	57334	10	4	7	38171	30664	52380	10	4	4	37127	29829	51463	10	4	3	37767	29889	51689	10	4	4	36633	34591	55487	10	4	21
Or67-117x14	*150	5	23,4	14824	11779	13482	5	3	19	12932	12151	13640	5	2	7	13671	11166	12906	5	3	21	14146	11277	12869	5	3	26	13628	11574	12971	5	2	21	17577	11237	12925	5	3	26

Tabela 8.5: Resultados obtidos com o algoritmo V4.

Não Hierárquico de Afecção Sequencial				Ligação Simples												Ligação Completa												Média de Grupo												Centróide												Ward												Saving																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
INSTÂNCIA				CR				CM				CL				NR				ND				T				CR				CM				CL				NR				ND				T				CR				CM				CL				NR				ND				T				CR				CM				CL				NR				ND				T																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
w	NMR	NC/R																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							

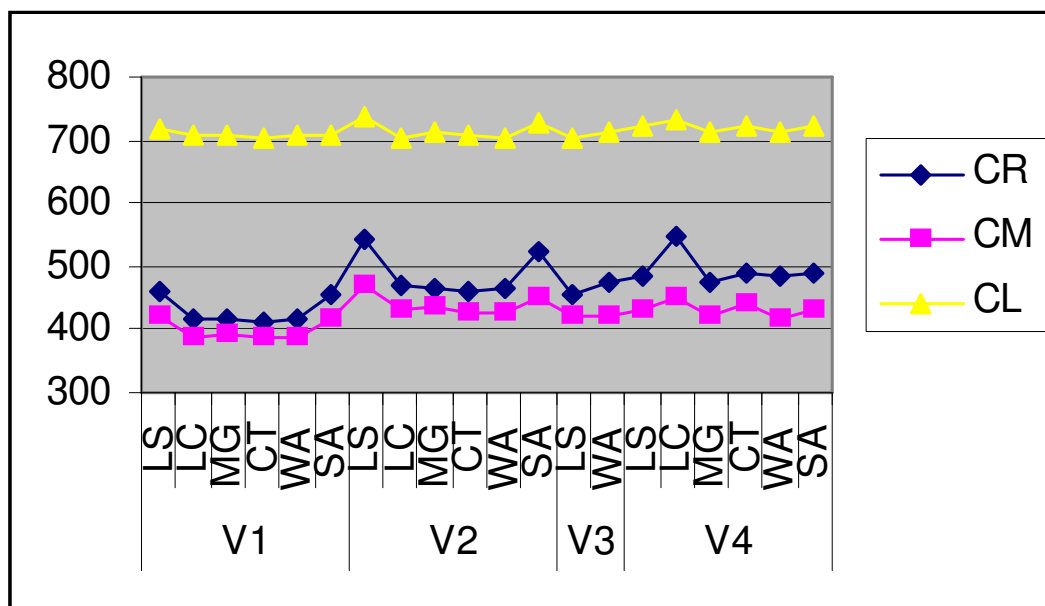


Figura 8.7: Custo após aplicação dos passos 2, 3 e 4 do algoritmo 2.

admite taxas de sucesso elevadas, ainda que, pontualmente, não permita encontrar as melhores soluções.

Se, aliada à frequência de boas soluções existir uma consistência de resultados, sem muitos *outliers*, então o algoritmo oferece boas perspectivas para resolução do PLDC.

Por inspeção das tabelas de resultados 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5, mais propriamente, das colunas referentes ao custo das soluções do PLDC (colunas CL), foram recolhidos e resumidos na tabela 8.6 alguns dados relativos à taxa de sucesso. Tendo em conta que a taxa de sucesso não pode ser avaliada somente pelo número de vezes que é obtida a melhor solução mas também pelo número de resultados que coloca próximos da melhor conhecida, são contabilizadas três tipos de taxa de sucesso. A primeira, a partir do número de soluções iguais à Melhor Solução Conhecida (MSC), obtida no conjunto das heurísticas. Por exemplo, na tabela 8.2 a medida de Ligação Simples conduz a 4 melhores resultados (4 células a sombreado) e, no entanto, apenas dois destes valores correspondem à melhor solução conhecida (tabela 8.8). A segunda, com base no número de soluções que pertencem a um intervalo que admite um desvio de 2% da MSC. Por fim, é considerada uma taxa de sucesso admitindo um erro de 5% relativamente à MSC.

As iniciais que constam na tabela 8.6 admitem o seguinte significado:

F = Frequência absoluta da MSC,

F(2%) = Frequência absoluta no intervalo $[MSC ; 1.02 MSC]$,

F(5%) = Frequência absoluta no intervalo $[MSC ; 1.05 MSC]$,

S = Sucesso Absoluto,

%S = Taxa de sucesso.

Tabela 8.6: Descrição do sucesso em cada par (algoritmo, medida de proximidade).

		Ligação Simples			Ligação Completa			Média de Grupo			Centróide			Ward			Saving			S	%S
		F	F2%	F5%	F	F2%	F5%	F	F2%	F5%	F	F2%	F5%	F	F2%	F5%	F	F2%	F5%		
Alg. V1	F	2			4			3			3			3			5			20	17.5
	F2%		4			7			5			8			4			5		33	28.9
	F5%			11			12			10			14			13			10	70	61.4
Alg. V2	F	2			6			4			4			6			2			24	21.1
	F2%		4			10			8			7			7			6		42	36.8
	F5%			8			10			12			9			11			9	59	51.8
Alg. V3	F	3												3						6	15.8
	F2%		9												8					17	43.6
	F5%			14												11				25	65.8
Alg. V4	F	2			5			5			4			4			3			23	20.2
	F2%		3			6			6			6			7			5		33	28.9
	F5%			5			10			8			10			9			8	50	43.9
S		9	20	38	15	23	32	12	19	30	11	21	33	16	26	44	10	16	27		
%S		11.8	26.3	50.0	26.3	40.4	56.1	21.1	33.3	52.6	19.3	36.8	57.9	21.1	34.2	57.9	17.5	28.1	47.4		

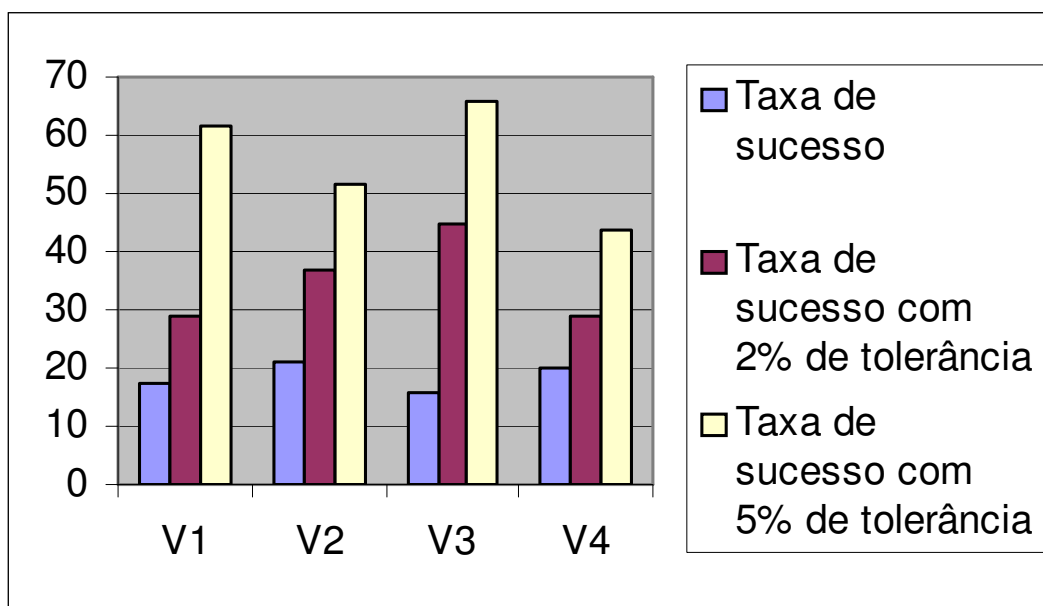


Figura 8.8: Taxas de sucesso nas várias versões do algoritmo.

A contabilização do número de vezes que um determinado algoritmo obteve a MSC é indicada na coluna S. A versão V2 proporcionou a obtenção da MSC 24 vezes, num total de 114, alcançando uma taxa de sucesso de 21,1% e desta forma destacando-se pela positiva das restantes versões.

O gráfico de barras da figura 8.8 mostra a relação existente entre as taxas de sucesso nas várias versões do algoritmo. A versão V2 apresenta a melhor taxa de sucesso simples enquanto que a V3 consegue sobrepor-se para um intervalo com 2% de tolerância. As versões V1 e V3 estão em evidência considerando um intervalo com 5% de tolerância. Considerando uma tolerância de 2 e 5%, a versão V3 leva vantagem sobre as demais. A versão V4 alcança os resultados menos promissores.

Apesar de ser possível destacar um ou outro algoritmo, os resultados não são conclusivos quanto à supremacia de qualquer deles sobre os restantes.

Uma avaliação idêntica foi também efectuada relativamente ao desempenho das várias medidas de proximidade. O gráfico de barras da figura 8.9 mostra a taxa de sucesso relacionada com as várias medidas. Parece claro que a medida de proximidade do tipo Ligação Completa se destaca no caso da taxa de sucesso simples e com tolerância de 2%, encontrando-se ao nível das melhores admitindo uma tolerância de 5%. Logo atrás seguem a medida Centróide, Ward e Média de Grupo (por esta ordem). A medida Ligação Simples alcança os piores resultados em termos de sucesso simples. Também a medida *Saving* se revela pouco eficaz. Tal como no caso das várias versões algorítmicas, face às ténues diferenças registadas, não existe uma evidência clara sobre a superiori-

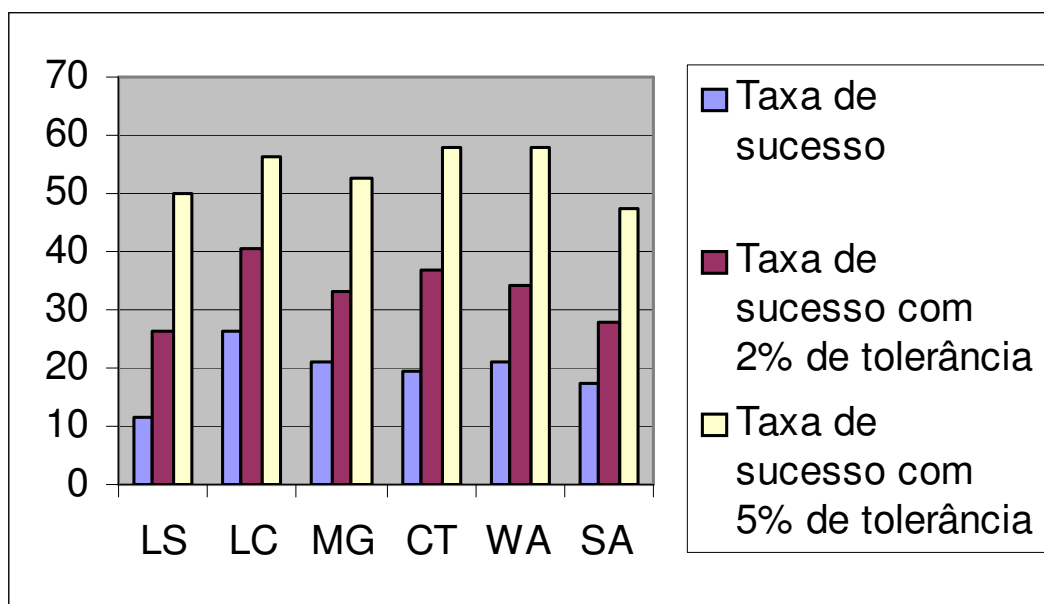


Figura 8.9: Taxas de sucesso em cada medida de proximidade.

dade inquestionável de qualquer uma das medidas de proximidade relativamente às restantes.

Os gráficos anteriores mostram a evolução da taxa de sucesso separadamente, em cada algoritmo e medida de proximidade. A figura 8.10 conjuga estes dados e mostra a evolução das várias taxas de sucesso em cada par (algoritmo, medida de proximidade). Tal como já era visível na figura 8.8, a versão V2 obtém as melhores taxas de sucesso simples, mas agora é possível identificar as combinações (V2,LC) e (V2,WA) como as grandes responsáveis por este resultado. Na versão V2 só a medida SA conduz a resultados decepcionantes. Também (V4,LC) e (V4,MG) permitem obter boas taxas de sucesso simples.

Relativamente à taxa de sucesso com uma tolerância de 2%, mantém-se o bom resultado de (V2,LC). Assiste-se agora ao avanço de V3, que ultrapassa V4, e coloca as suas duas medidas em lugar de destaque.

É na taxa de sucesso com 5% de tolerância que se dão as maiores reviravoltas; a versão V1, até então com resultados modestos dá um salto surpreendente e coloca as medidas CT e WA entre as melhores. A versão V3 vê confirmada o seu bom desempenho, em especial o par (V3,LS). A versão V2 vê-se ultrapassada pela V1, enquanto que a V4 começa por apresentar boas taxas de sucesso simples, mas não aguenta o lugar nos restantes casos.

O comportamento de cada uma das curvas do gráfico 8.10 é ilustrado em pormenor nas figuras 8.11, 8.12 e 8.13. Por inspeção do gráfico de barras representado na figura 8.11 é possível confirmar que as melhores taxas de sucesso simples são alcançadas com

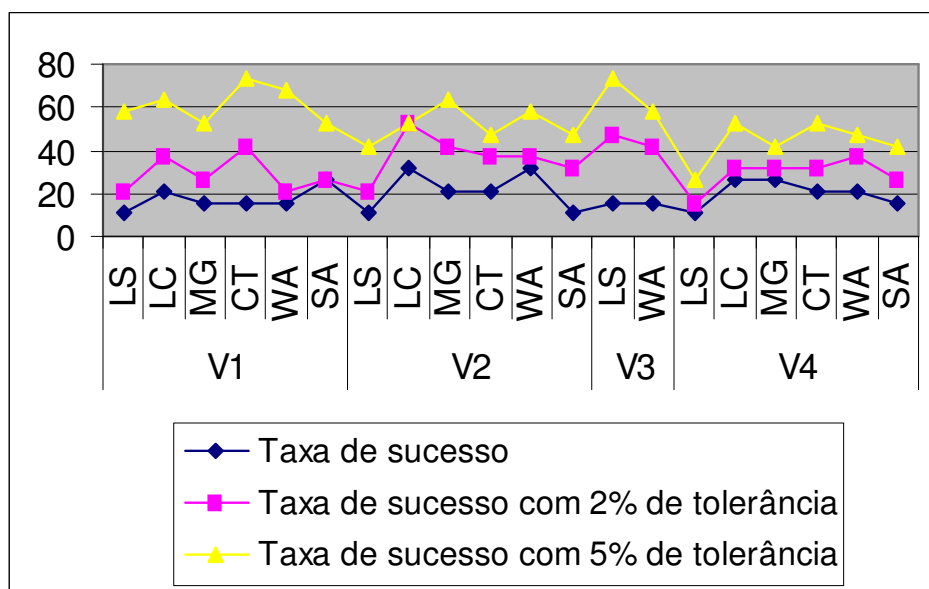


Figura 8.10: Taxas de sucesso em cada par (algoritmo, medida de proximidade).

as combinações (V2,LC) e (V2,WA) alcançando resultados acima dos 30%. A medida LC revela um excelente comportamento em todas as versões.

A figura 8.12 mostra a taxa de sucesso com uma tolerância de 2%. Desta vez as melhores taxas de sucesso repartem-se por várias medidas, destacando-se o par (V2,LC). Em termos de algoritmo começa a vir ao de cima a versão V3.

Finalmente, a observação da figura 8.13, relativa à taxa de sucesso com uma tolerância de 5%, revela as potencialidades da versão V1. Tendo-se mantido discreta até então, consegue agora bons resultados em quase todas as medidas a par com os alcançados com a versão V3. Neste caso, nenhuma medida de proximidade se destaca pela positiva.

A análise estatística dos registos constantes na tabela 8.6 pode ser complementada com auxílio de uma ferramenta estatística de análise multivariada de dados designada por Análise Factorial de Correspondências (AFC). Trata-se de um método de projecção dos dados num referencial bidimensional, usando para o efeito uma métrica de qui-quadrado [69], de tal forma que a perda de informação é minimizada. A figura 8.14 mostra os resultados desta análise para os diversos registos de sucesso. V1, V2, V3 e V4 representam o sucesso simples dos algoritmos; V1-2, V2-2, V3-2 e V4-2 o sucesso com uma tolerância de 2% e V1-5, V2-5, V3-5, V4-5 o sucesso com com 5% de tolerância. As versões do algoritmo 2 e as medidas de proximidade são representadas com um círculo e um quadrado, respectivamente. A figura permite identificar alguns pares com uma forte correspondência e a dinâmica de variação do sucesso à medida que se vai aumentando o intervalo de tolerância. A título de exemplo refira-se que a medida LS

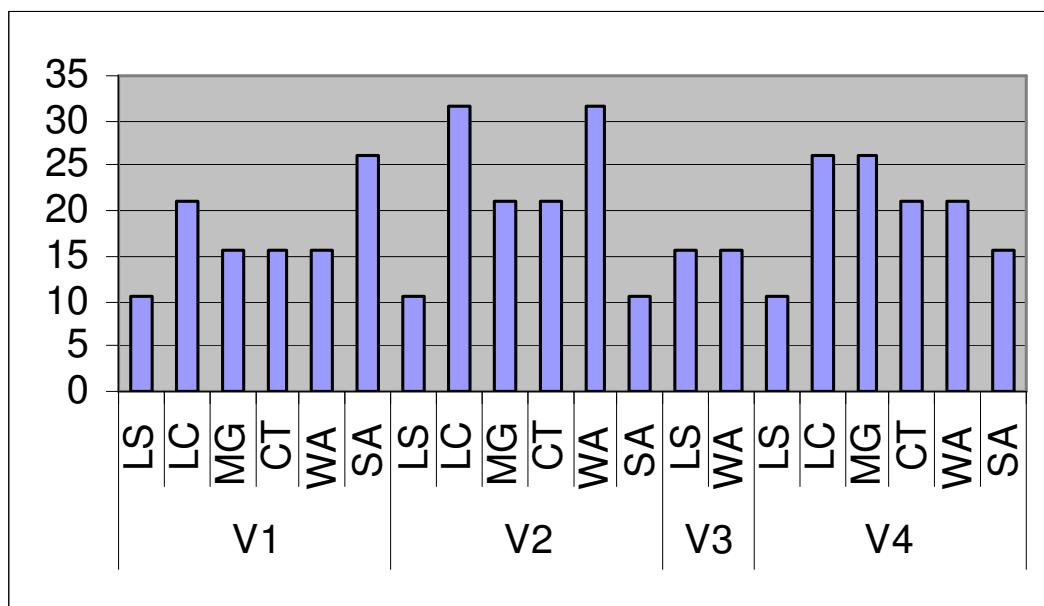


Figura 8.11: Taxa de sucesso simples em cada par (algoritmo, medida de proximidade).

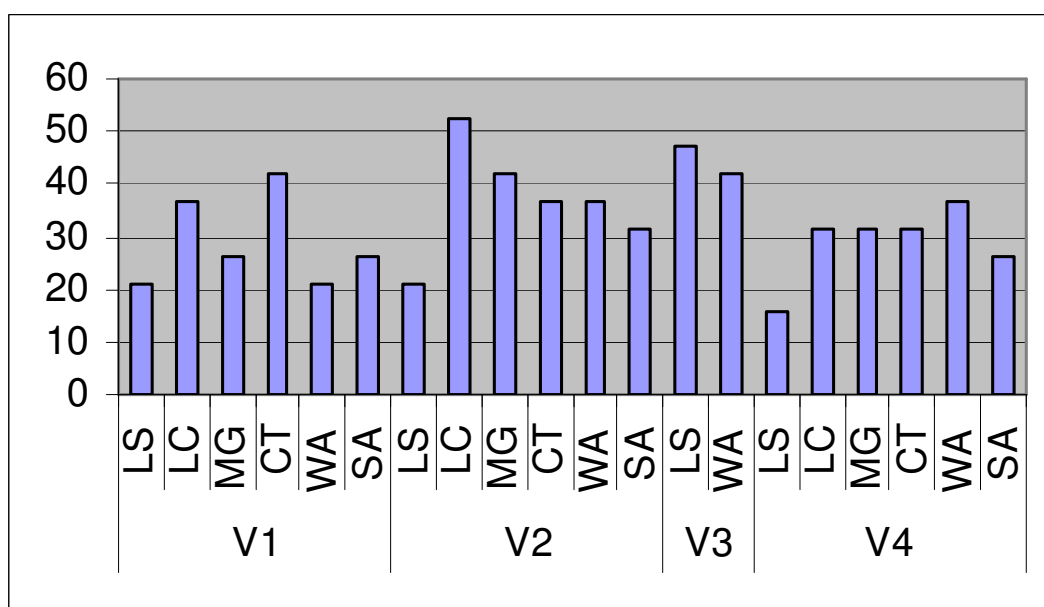


Figura 8.12: Taxa de sucesso com 2% de tolerância em cada par (algoritmo, medida de proximidade).

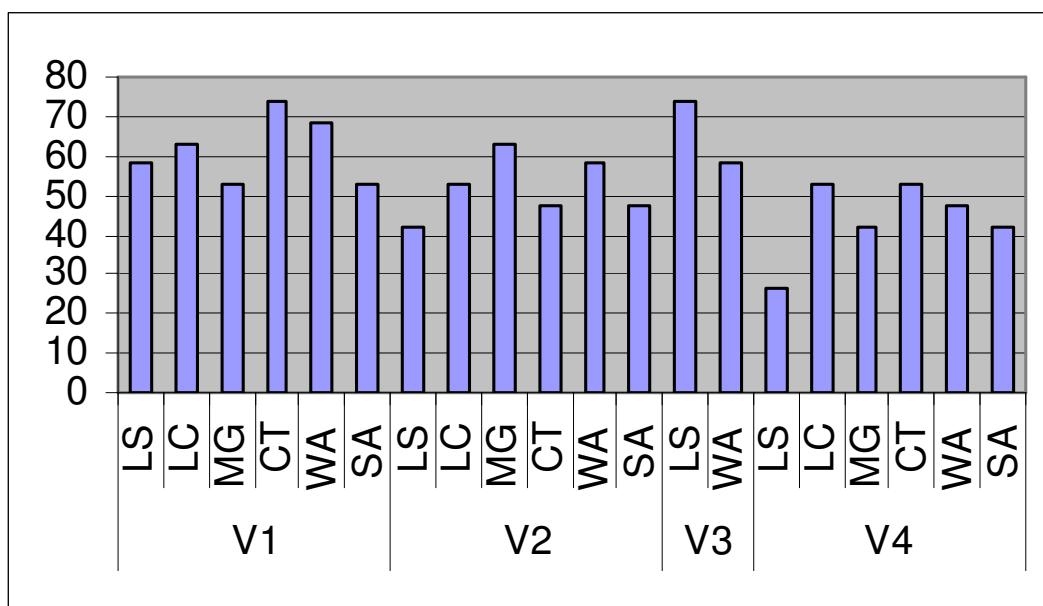


Figura 8.13: Taxa de sucesso com 5% de tolerância em cada par (algoritmo, medida de proximidade).

é pouco promissora em V1, V2 e V4, comportando-se bem com a versão V3 ou que o algoritmo V2 não "tira partido" da medida SV. Numa outra perspectiva, ressalta alguma individualização das medidas LS, SV e WD.

Por outro lado, a utilização de uma Análise em Componentes Principais (ACP) [114] à tabela 8.6 permite, através da inspecção do plano constituído pelas duas primeiras componentes (figura 8.15), a "construção" de uma seriação, em função do desempenho dos algoritmos e respectivos registos de sucesso. A posição deve ser lida de acordo com a coordenada do primeiro factor e tendo em conta que o aumento de desempenho se "lê" da direita para a esquerda (o melhor, no grupo dos 5% é o V3-5).

No geral, a análise da taxa de sucesso permite concluir que o algoritmo V4 alcança os piores resultados, chegando mesmo a "versão dos 5%" a ser ultrapassada pelo "V3 a 2%". Entre os algoritmos V1, V2 e V3 não há uma evidência clara sobre a superioridade de qualquer deles, embora se assista a uma ligeira vantagem do algoritmo V3, tendo em conta que coloca mais resultados próximos da MSC (com uma tolerância de 2% e 5%).

A grande disparidade de resultados em termos de ordem de grandeza impede o recurso à média aritmética como medida estatística representativa. Como consequência fica também inviabilizado o recurso ao desvio padrão e consequentemente a análise da dispersão dos resultados. Para refinar a avaliação do desempenho, tal como é entendido na página 195, é definida uma nova medida de dispersão, não em função da média mas

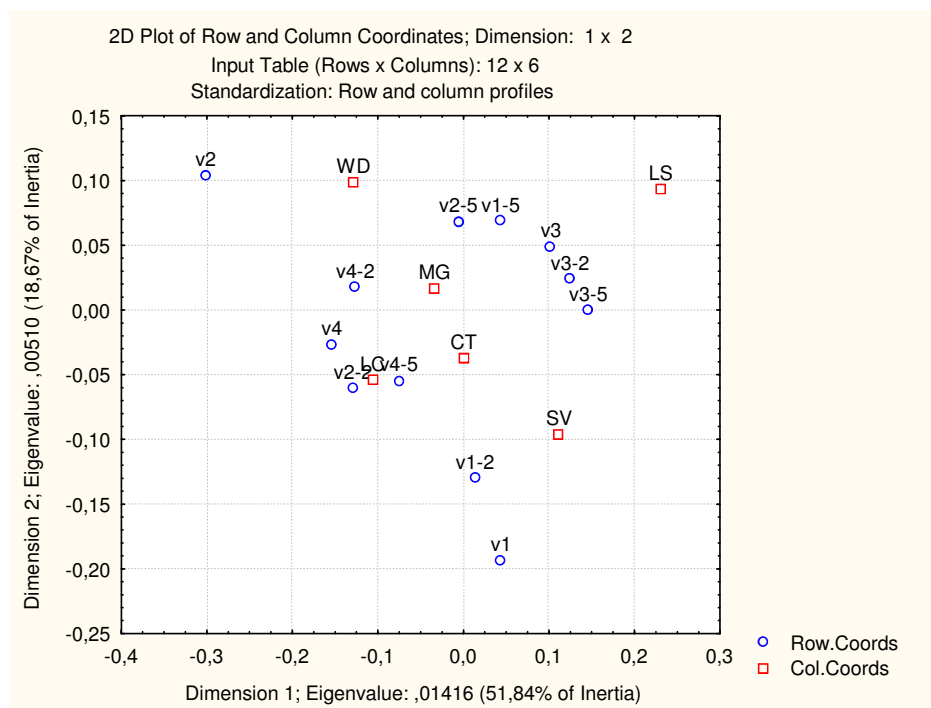


Figura 8.14: Projecção no plano 1x2 (representando cerca de 80% da informação inicial) de uma AFC efectuada sobre a tabela 8.6.

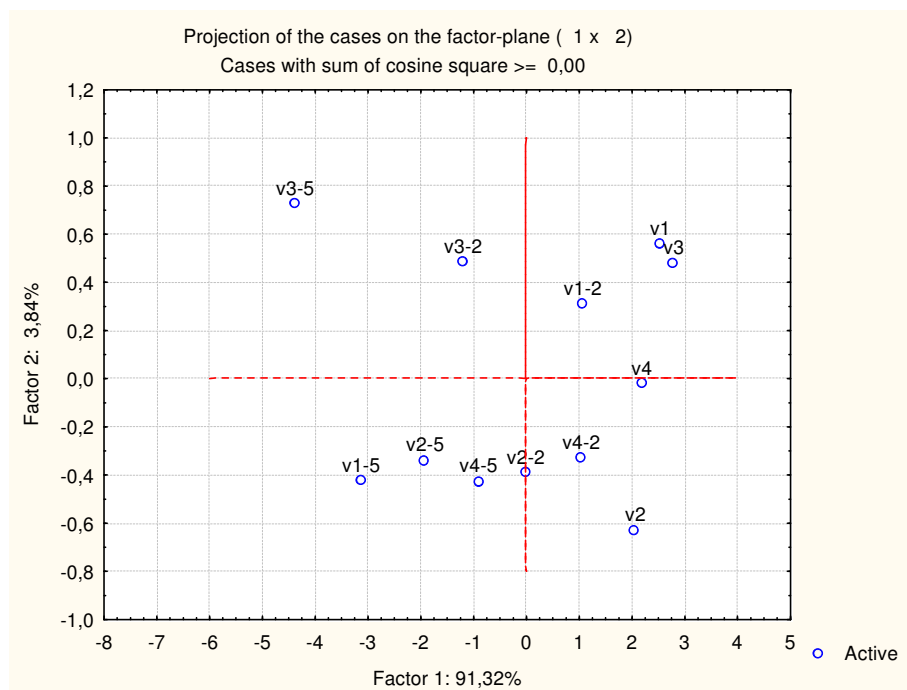


Figura 8.15: Projecção no plano 1x2 (representando cerca de 94% da informação inicial) de uma ACP efectuada sobre a tabela 8.6.

sim face à MSC.

Definição 15

Seja $MSC(i)$ a melhor solução conhecida para uma instância i de um problema.

Seja $C(i)$ o custo da solução da instância i obtido por aplicação de um algoritmo.

Define-se desvio relativo face à MSC e representa-se por $\alpha(i)$ como sendo o valor

$$\alpha(i) = \frac{C(i) - MSC(i)}{MSC(i)} \times 100$$

O desvio relativo face ao custo da MSC é uma medida independente da ordem de grandeza dos resultados. Com base nesta medida é possível relacionar definitivamente o desempenho com a capacidade de colocar soluções próximas da MSC e eliminar os problemas decorrentes de resultados de ordem de grandeza distinta (devido ao ser carácter percentual), refinando a análise efectuada a partir da taxa de sucesso.

A tabela 8.7 indica o desvio relativo, face à MSC (tabela 8.8), dos resultados ilustrados nas colunas CL das tabelas 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5.

A partir da média do desvio relativo da MSC, indicado na última linha da tabela 8.7, é agora possível traçar o gráfico da figura 8.16.

A versão V1 confirma claramente o bom desempenho, identificado aquando da análise da taxa de sucesso com 5% de tolerância, e alcança desvios médios de boa qualidade em todas as medidas de proximidade. A combinação (V1,CT) ocupa a melhor posição com um desvio médio abaixo dos 4%. A versão V3 também permite obter resultados com baixo nível de desvio médio, em especial a combinação (V3,LS), confirmando as indicações trazidas da análise de componentes principais.

Os resultados que colocam as versões V1 e V3 em lugar de destaque são, de certa forma, surpreendentes. À partida, nem os métodos hierárquicos nem a afectação directa, se posicionavam como sendo os mais propícios à obtenção de bons resultados. Por um lado, existe a opinião geral de que os métodos hierárquicos são mais apropriados para as ciências biológicas e sociais, onde é necessário apenas construir taxonomias, enquanto que os métodos não hierárquicos se adequam melhor às ciências matemáticas e engenharias, onde é necessário identificar cada elemento da partição e onde predominam os espaços métricos euclidianos [110] (pp. 89-90). Pelo menos, no caso do PLDC, tal conjectura não se comprova, sendo um método hierárquico a assumir um lugar de destaque. Por outro lado, o método de afectação directa, que apenas usa o cliente fonte de um grupo para a sua construção, "esquecendo" o grupo como um todo, também não seria o candidato ideal a uma boa posição. Apesar das percepções iniciais, os resultados demonstram que V1 e V3 são, de facto, as versões do algoritmo 2 mais bem colocadas para resolver o PLDC.

Tabela 8.7: Desvio relativo face à Melhor Solução Conhecida.

	V1						V2						V3						V4								
	LS	LC	MG	CT	WA	SA	LS	LC	MG	CT	WA	SA	LS	WA	SA	LS	LC	MG	CT	WA	SA	LS	MG	CT	WA	SA	
1 Gaskell67-21x5	2.98	12.61	0.92	0.92	12.61	4.82	12.61	0.00	1.83	0.00	0.00	8.03	0.00	1.38	8.03	6.88	2.52	5.73	7.80	0.92	8.03	6.88	2.52	5.73	7.80	0.92	8.03
2 Gaskell67-22x5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.20	0.00	10.49	3.21	0.00	10.49	12.01	0.00	0.00	0.00	0.00	12.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3 Gaskell67-29x5	7.23	0.00	7.23	7.23	0.00	0.00	21.88	20.31	24.41	19.92	24.22	20.31	19.73	7.23	7.23	7.23	7.23	7.23	7.23	1.76	7.23	7.23	7.23	7.23	7.23	7.23	7.23
4 Gaskell67-32x5	14.16	6.12	6.12	1.57	6.12	8.39	0.35	0.00	0.70	0.00	0.70	0.35	0.17	4.72	0.35	10.49	0.00	0.00	6.29	6.29	0.52	10.49	0.00	0.00	6.29	0.52	10.49
5 Gaskell67-32x5	7.83	7.83	7.83	1.76	7.83	0.00	2.35	5.68	0.00	9.59	0.00	12.33	1.37	0.00	12.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6 Gaskell67-36x5	7.43	12.10	12.10	12.10	12.10	5.94	3.61	0.00	4.88	4.03	4.88	5.31	1.27	1.27	5.31	4.67	3.61	2.34	2.34	2.34	2.34	4.67	3.61	2.34	2.34	2.34	5.31
7 Christofides69-50x5	4.12	9.43	5.49	5.49	5.66	6.00	10.29	0.00	3.95	13.21	7.03	11.84	4.29	12.86	11.84	10.98	17.67	19.90	17.67	17.67	10.12	10.98	17.67	19.90	17.67	10.12	10.98
8 Christofides69-75x10	6.88	1.81	6.55	2.26	3.61	2.14	20.77	7.11	9.48	9.26	0.00	14.33	3.39	11.51	8.58	0.90	7.67	13.88	7.79	13.54	13.54	7.67	13.88	7.79	13.54	13.54	
9 Christofides69-100x10	10.80	4.72	6.52	2.81	4.50	6.86	5.51	6.75	1.35	0.00	7.65	1.46	0.67	1.46	1.46	5.62	25.42	2.36	9.00	2.02	11.47	5.62	2.36	9.00	2.02	11.47	
10 Peri83-12x2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11 Peri83-55x15	3.17	2.99	1.58	3.43	3.43	4.05	4.84	0.09	0.88	0.35	0.00	3.43	2.64	2.11	0.62	3.43	5.63	0.18	0.18	1.58	3.43	5.63	0.18	0.18	1.58	3.43	5.63
12 Peri83-85x7	2.90	2.47	2.60	2.23	2.78	5.13	1.33	1.15	4.28	0.91	0.00	4.10	0.78	1.69	4.10	4.16	2.17	1.39	2.47	2.23	2.41	4.16	2.17	1.39	2.47	2.23	2.41
13 Peri83-318x4	0.26	0.00	5.64	3.10	2.13	10.35	15.01	5.40	10.84	8.70	4.79	1.87	9.17	6.09	10.84	11.65	16.54	2.89	5.67	10.52	10.52	11.65	16.54	2.89	5.67	10.52	10.52
14 Peri83-318x4	2.32	6.86	3.94	1.48	2.74	2.01	22.69	0.00	12.23	14.63	9.43	11.87	3.60	0.80	15.74	14.50	10.82	8.16	13.72	2.44	13.72	14.50	10.82	8.16	13.72	2.44	13.72
15 Min92-27x5	12.28	16.30	12.28	12.28	18.48	12.61	22.18	16.20	0.00	7.09	16.20	0.13	15.41	0.00	10.58	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	10.03	10.58	0.00	0.00	0.00	0.00	10.03
16 Min92-134x8	2.07	2.63	2.89	1.39	3.27	0.00	2.13	27.22	7.41	15.17	18.00	26.53	17.15	8.05	19.61	25.71	12.50	20.26	15.39	10.90	12.50	20.26	15.39	10.90	15.39	10.90	10.90
17 Daskin95-88x8	11.17	4.16	3.12	3.64	3.38	2.34	49.35	1.04	22.60	5.45	10.39	21.30	0.00	31.17	12.47	47.53	7.01	38.70	24.42	27.79	27.79	47.53	7.01	38.70	24.42	27.79	27.79
18 Daskin95-150x10	1.45	0.54	0.00	0.00	1.94	11.79	17.63	22.92	12.30	10.34	10.82	18.96	3.58	13.84	11.98	16.64	27.69	17.50	32.44	11.93	17.50	32.44	17.50	32.44	11.93	32.44	11.93
19 Or76-117x14	3.74	0.60	4.32	10.89	2.51	15.44	8.08	9.35	3.46	3.17	3.98	3.62	1.23	6.21	5.02	17.81	0.00	2.82	6.24	3.17	17.81	0.00	2.82	6.24	3.17	17.81	3.17
Média	5.30	4.80	4.69	3.82	4.90	5.15	11.61	6.48	6.35	6.41	6.33	8.72	5.00	5.98	8.29	10.36	7.01	7.99	7.61	7.22	8.29	10.36	7.01	7.99	7.61	7.22	7.22

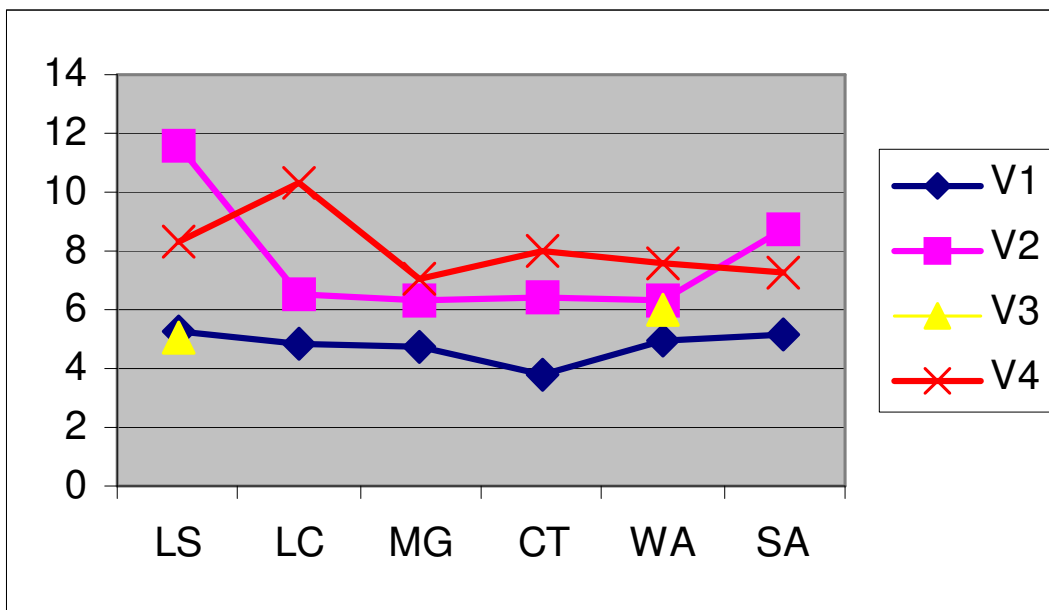
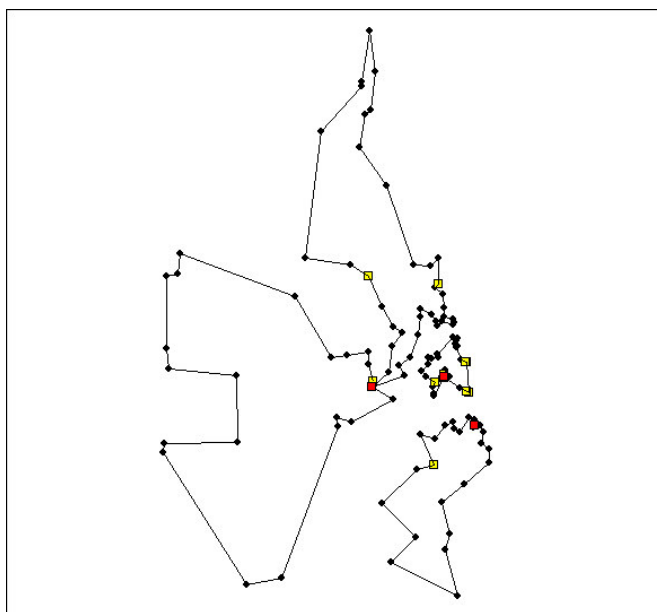


Figura 8.16: Desvio médio da melhor solução conhecida.

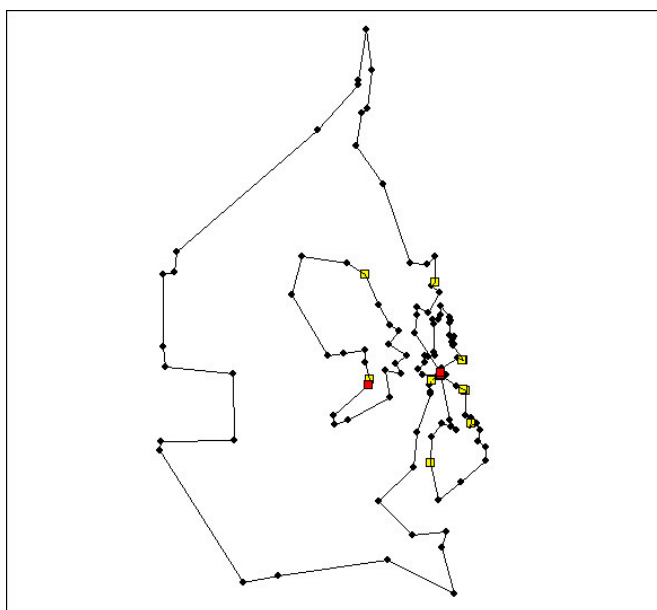
Apesar de algumas indicações de tendência para esta ou aquela combinação (algoritmo, medida de proximidade), um olhar pelas tabelas de resultados mostra que as melhores soluções admissíveis se encontram espalhadas por todas as versões e medidas de proximidade. Sendo assim, é fortemente aconselhável resolver o PLDC com as 4 versões do algoritmo e as 6 medidas de proximidade, escolhendo posteriormente a melhor solução admissível. Desta forma, não só se potencia a hipótese de alcançar uma boa solução em termos de custo como se pode ter acesso a um leque de soluções variadas. A própria escolha da solução pode não ser uma tarefa estritamente dependente da quantificação do seu custo. Nem sempre a melhor solução é a de mais baixo custo, dependendo do caso prático em estudo e dos condicionalismos e aspirações dos decisores.

Exemplo 24

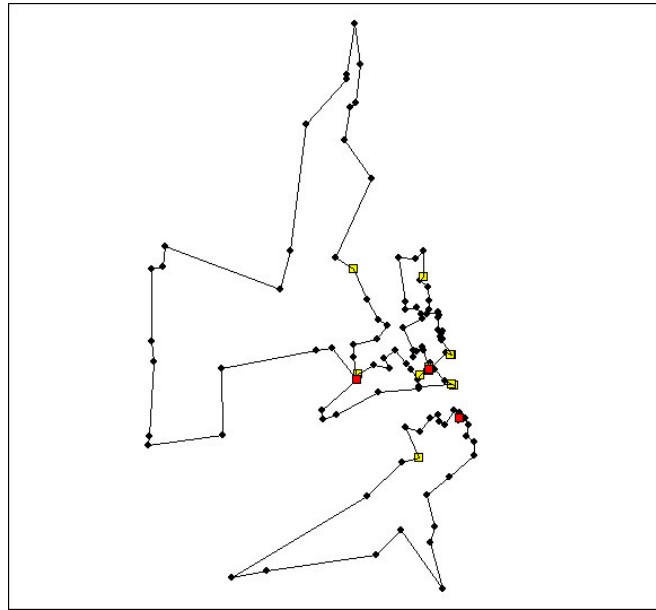
Or [173] apresentou em 1976 um interessante PLDC sobre a localização de bancos de sangue na zona metropolitana de Chicago e o traçado de rotas de distribuição de sangue pelos hospitais da mesma zona (instância 19). As figuras seguintes mostram apenas as 4 soluções de menor custo obtidas a partir da instância 19 (Or76-117×14). Como se pode verificar, existem ligeiras diferenças de custo mas enormes diferenças de concepção. Seria insensato justificar uma escolha apenas no custo final da solução. Os decisores devem conhecer as várias propostas de solução. Só assim podem optar pela mais conveniente de acordo com os seus objectivos.



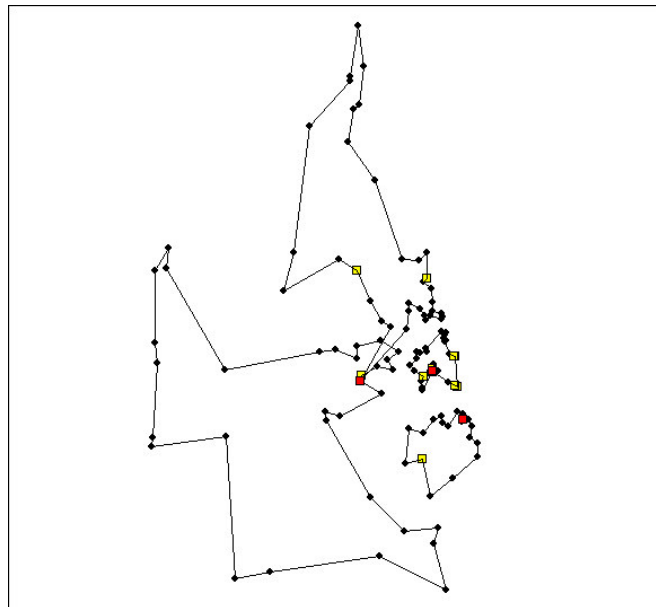
Solução obtida com a combinação (V4, MG). 5 rotas e 3 CA. Custo=12474.



Solução obtida com a combinação (V1, LC). 5 rotas e 2 CA. Custo=12549.



Solução obtida com a combinação (V3,SL). 5 rotas e 3 CA. Custo=12683.



Solução obtida com a combinação (V1,WA). 5 rotas e 3 CA. Custo=12787.

Dados Uniformizados

Como já foi referido anteriormente, os dados que servem de base à construção das 19 instâncias em teste (apêndice A) possuem ordem de grandeza muito distinta. Para potenciar uma avaliação em igualdade de circunstâncias, ou simplesmente para permitir a representação gráfica das soluções no mesmo plano, os dados podem ser uniformizados para um quadrado com λ unidades de medida do lado. Por exemplo, sem a uniformi-

zação dos dados, as instâncias 13 e 14 (Perl83-318x4) produzem soluções com valores de grandeza próximos do milhão, enquanto que as instâncias 7, 8 e 9 (Christofides69) conduzem a soluções da ordem da centena. Tal disparidade de resultados impede uma correcta avaliação estatística, sob pena de se assistir à diluição das pequenas e significativas diferenças dos resultados menores nas enormes variações (não mais significativas) das instâncias com resultados de maior ordem de grandeza.

É importante referir que a uniformização dos dados não interfere com o grau de dificuldade da instância ou a qualidade das soluções obtidas, apenas altera o custo das soluções. Nesta secção é proposto um ajuste dos dados correspondentes às coordenadas dos clientes, CA e custo fixo dos CA. Estes são simplesmente ampliados ou encolhidos para um novo formato por multiplicação por um factor δ determinado do seguinte modo:

$$\delta = \min \left(\frac{\lambda}{MaxX - MinX}, \frac{\lambda}{MaxY - MinY} \right)$$

em que:

$MaxX$ é o valor máximo das abcissas dos clientes e CA,

$MinX$ é o valor mínimo das abcissas dos clientes e CA,

$MaxY$ é o valor máximo das ordenadas dos clientes e CA,

$MinY$ é o valor mínimo das ordenadas dos clientes e CA.

Em concreto, foi assumido que $\lambda = 500$, sendo esta a dimensão possível para a janela de representação gráfica no écran do computador (com 15"), veja-se a breve ilustração na secção 7.3.2. Em cada caso o leitor escolherá o valor mais adequado.

Resta apenas, a partir dos dados originais (apêndice A), proceder à uniformização, determinando as novas coordenadas X', Y' e o custo fixo f'_k do seguinte modo:

$$\text{Abcissa} = X' = \delta \times (X - MinX)$$

$$\text{Ordenada} = Y' = \delta \times (Y - MinY)$$

$$\text{Cust. Fixo} = f'_k = \delta \times f_k$$

Os restantes valores mantêm-se inalterados.

Relativamente à resolução nada se modifica pois este processo equivale a multiplicar todos os coeficientes da função objectivo dos respectivos PLDC por uma constante δ . A solução mantém-se, sendo alterado apenas o seu valor.

Na prática ganha-se em dois campos. Por um lado obtém-se uma uniformização de coordenadas, facilitando a representação gráfica e a interactividade com o utilizador. Por outro, ao trabalhar com valores da mesma ordem de grandeza, é possível aplicar mais facilmente alguns procedimentos estatísticos e desta forma proceder a uma melhor avaliação dos resultados. Acresce ainda a possibilidade de observar o comportamento evolutivo dos algoritmos e medidas de proximidade com a representação dos valores médios após os passos 2, 3 e 4.

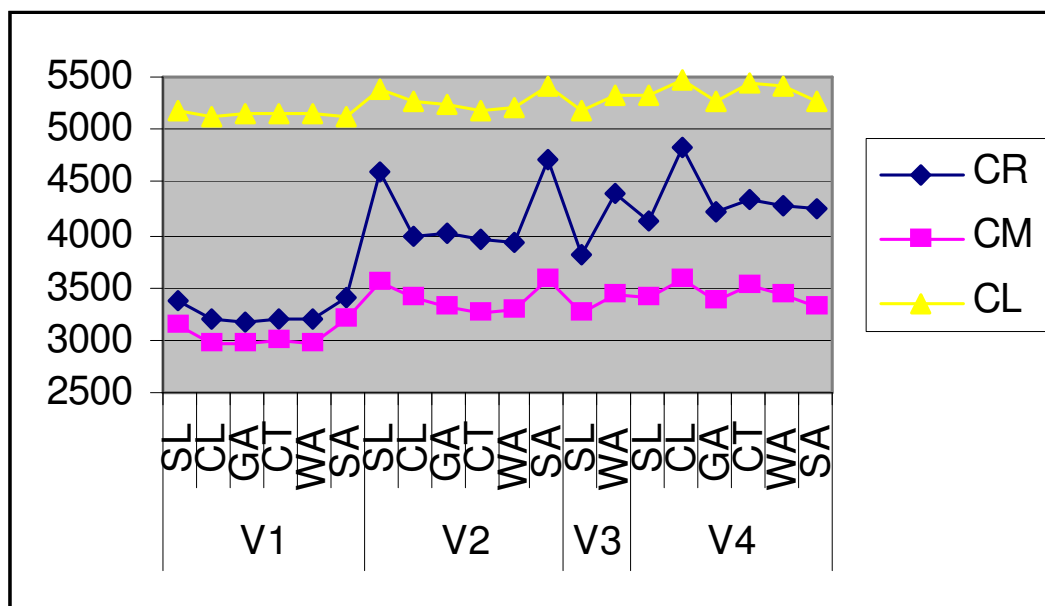


Figura 8.17: Resultados médios obtidos a partir dos dados uniformizados.

A figura 8.17 representa graficamente as médias de resultados obtidos a partir dos dados uniformizados, em cada par (algoritmo, medida de proximidade). São agora corroboradas as conclusões suscitadas na página 200 a propósito da análise da figura 8.7, ainda que, na altura, por razões já explanadas tenham sido excluídas algumas instâncias.

A curva CR representa os resultados médios obtidos após a aplicação do passo 2 do algoritmo, sendo claramente reconhecido que a versão V1 (hierárquica de uma fase) permite obter consistentemente os melhores resultados seja qual for a medida de proximidade considerada.

A linha CM indica a evolução média dos resultados após a aplicação do passo 3 de melhoramento das rotas. Sem margem para dúvidas, o procedimento de melhoramento permite obter melhorias significativas em todos os algoritmos. Os valores totais obtidos após este passo representam um decréscimo de 16,5%, um desempenho assinalável tendo em conta que nada de novo é acrescentado ao algoritmo, apenas é melhorado o custo das rotas construídas. Uma análise mais atenta do comportamento desta linha revela outra faceta desta heurística de melhoramento, a sua capacidade para atenuar e diluir os "picos" (maus resultados) obtidos no processo de agrupamento. Há claramente um efeito de "linearização" relativamente aos resultados pouco consistentes obtidos na fase de agrupamento, em especial com as versões V2, V3 e V4.

Apesar da boa prestação do processo de melhoramento pode-se questionar se é igualmente relevante para a qualidade das soluções finais. Estudos recentes [14] mostraram que as soluções do PLDC obtidas com a supressão do passo 3 são, em geral,

25% piores. Na figura 8.17 é visível que as piores soluções iniciais, em termos de custo das rotas, conduzem às piores soluções finais, mesmo com a "almofada" proporcionada pelo melhoramento.

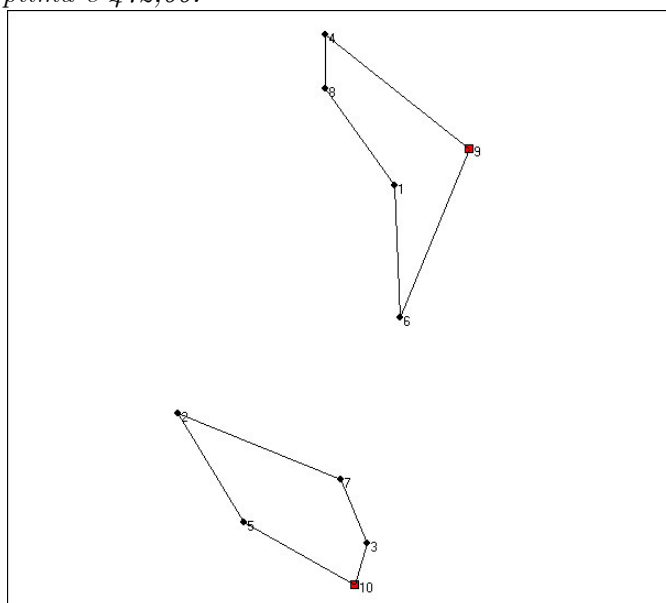
A heurística de melhoramento contribui de forma clara para os bons resultados do algoritmo 2, no entanto, não deve transparecer a ideia da sua infalibilidade. Por vezes, especialmente em instâncias de pequena dimensão, pode mesmo revelar-se um impedimento à obtenção de melhores soluções, como é ilustrado no exemplo 25.

Uma referência ainda para os resultados médios das soluções dos PLDC, indicados pela linha CL da figura 8.17. Também aqui é perceptível uma ligeira vantagem da versão V1 do algoritmo, mantendo-se constante com as várias medidas de proximidade.

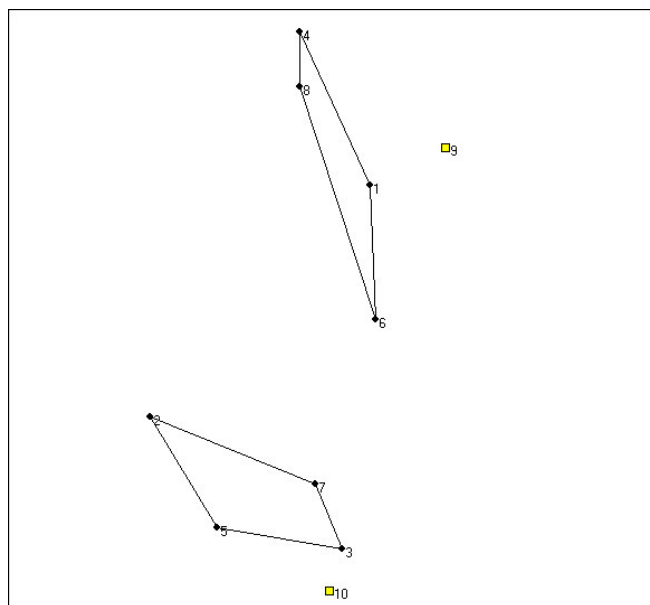
Em face da análise das médias de resultados obtidos a partir dos dados uniformizados é de reconhecer alguma vantagem comparativa da versão V1 do algoritmo face às demais. Mesmo a versão V3, que nas análises sobre o sucesso e sobre desvio médio da MSC, acompanhou de perto a versão V1, acusa agora um ligeiro recuo, assumindo V1 a melhor posição.

Exemplo 25

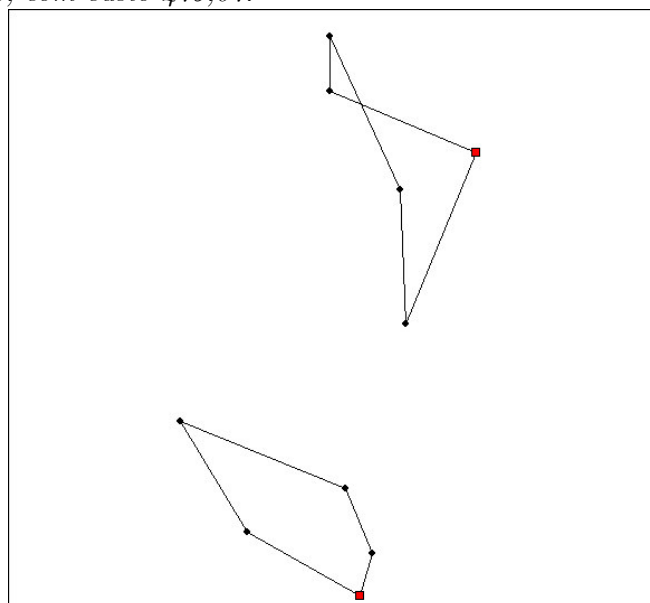
A figura seguinte ilustra a solução ótima de um pequeno problema proposto por Srivastava [197] (p.120). A capacidade dos CA é de 714 (indicada pelo autor). O custo da solução ótima é 472,66.



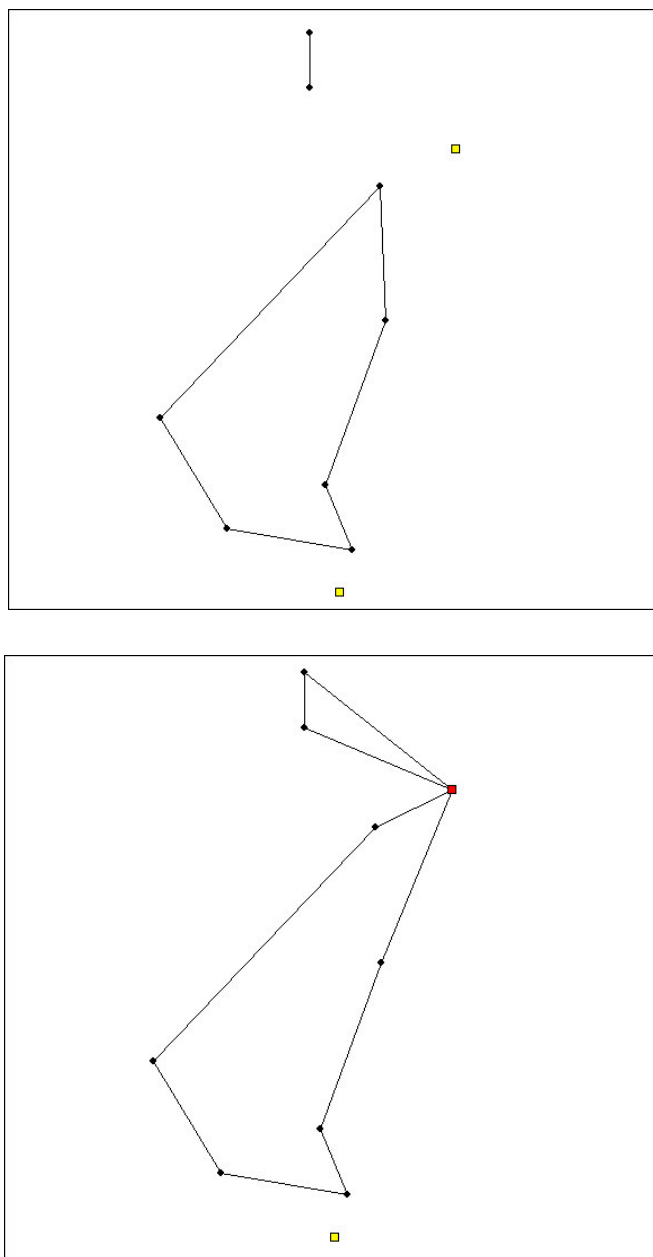
A aplicação do algoritmo identificado pelo par (V1,LS) permite obter, após o passo 2 (construção das rotas), as seguintes rotas.



A passagem imediata ao passo 4 (localização), sem passar pelo passo 3 (melhoramento), conduz a uma solução admissível muito próxima da ótima. A figura seguinte ilustra essa solução, com custo 479,07.



Contudo, a passagem pelo passo 3, como mostram as figuras seguintes, leva à obtenção de uma pior solução, com custo 524,39. Felizmente esta é uma exceção que pode confirmar a regra observada em todas as restantes instâncias em teste.



8.7.2 Confronto Externo

Na secção anterior foi efectuada uma avaliação relativa das heurísticas confrontando-as entre si. Nesta secção será efectuada uma avaliação em termos absolutos da real qualidade das soluções obtidas com o algoritmo 2. A tabela 8.8 indica um limite inferior ou Custo da Solução Relaxada (CSR), um limite superior ou Custo da Melhor Solução Heurística (CMSH) e o Custo da Solução obtida pelo Método Sequencial Clássico (CSMS) (algoritmo 9). Os valores na coluna CSR são os constantes na tabela 7.2 (p. 149) obtidos por aplicação do algoritmo exacto. Os valores na coluna CMSH foram

recolhidos por inspecção das tabelas 8.2, 8.3, 8.4 e 8.5. Os limites inferiores e superiores encontram-se assinalados com um asterisco quando correspondem à solução óptima.

A partir dos resultados constantes em CSR e CSMH é possível enquadrar o valor da solução óptima e determinar uma percentagem de erro que se designa habitualmente por *Gap*. Conhecido um limite superior (*LimSup*) e um limite inferior (*LimInf*) do custo da solução óptima o *Gap* é calculado da seguinte forma:

$$\frac{LimSup - LimInf}{LimInf} \times 100$$

A tabela 8.8 mostra que o *Gap* anda entre um mínimo de 0% e um máximo de 19,01%, obtendo-se uma média de 4,89% e uma mediana de 3,13%. Por desconhecimento de um limite inferior relativo às instâncias 13, 14 e 16 não foi possível avaliar o erro cometido. A média de *Gap* é fortemente influenciada por dois valores (relativos às instâncias 8 e 9) que constituem verdadeiros *outliers*. Trata-se de duas instâncias propostas por Christofides et al. [45] cujos limites inferiores correspondem às soluções não admissíveis referidas nas figuras 8.18 e 8.19. São soluções que possuem cadeias entre CA e muitas rotas com capacidade excedentária, encontrando-se ainda muito longe da solução óptima. Além disso provêm de instâncias em que os clientes assumem uma disposição espacial que revela alguma uniformidade de distribuição no plano, reconhecidas como sendo de resolução mais difícil. Desta forma, tudo leva a concluir que o principal responsável pela grandeza do *Gap*, nestes dois casos, seja o limite inferior e não o valor da solução heurística. Sem considerar estas duas instâncias o *Gap* médio é dado por 3,32%, porventura um valor que traduz com mais rigor a sua verdadeira dimensão. Aliás o valor do primeiro quartil é de 1,25% e o do terceiro quartil é de 6,76%. É um resultado excelente que confirma as enormes potencialidades da resolução de PLDC com recurso aos métodos de agrupamento. O algoritmo 2 revela um desempenho assinalável apesar de ter sido construído sob alguns condicionalismos relacionados com o objectivo de avaliar os diferentes métodos de agrupamento.

Também é comum avaliar as heurísticas comparando os resultados com o método sequencial clássico. Srivastava [199] refere mesmo que o erro cometido é inferior a 10%. Para concretizar esta análise foi implementado um algoritmo sequencial do tipo localização→distribuição que funciona em dois passos.

Algoritmo 9 *Resolução Sequencial do PLDC*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

Coordenadas de $P = \{n+1, n+2, \dots, n+p\}$ potenciais CA com capacidade u_k e custo de instalação $f_k : k = 1, 2, \dots, p$.

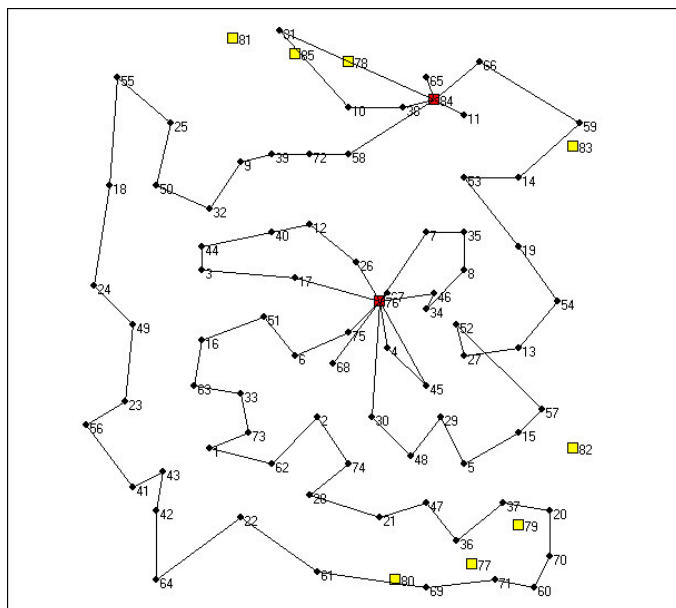


Figura 8.18: Solução não admissível da instância 8 (Christofides69-75x10), correspondente ao limite inferior 744,7.

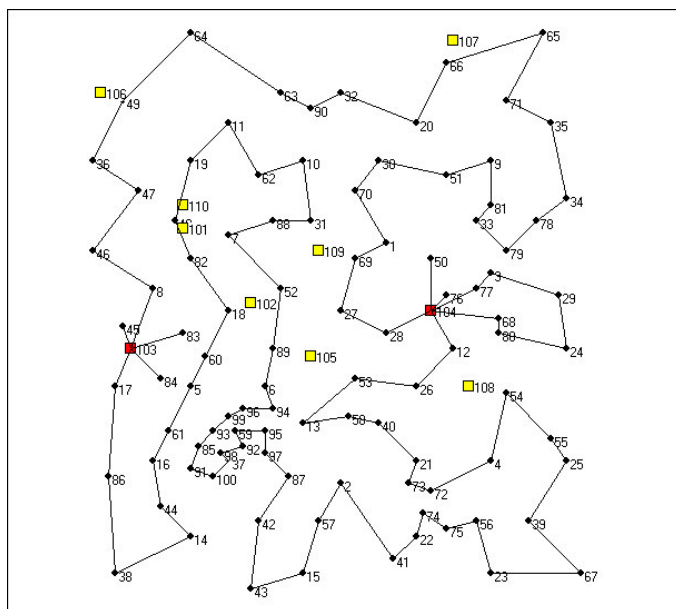


Figura 8.19: Solução não admissível da instância 9 (Christofides69-100x10), correspondente ao limite inferior 788,6.

Tabela 8.8: Limites inferiores e superiores do valor da solução óptima.

Instância		CSR	CMSH	Gap(%)	CSMS	VAR(%)
1	Gaskell67-21x5	424.9 *	435.9	2.59	436	0.02
2	Gaskell67-22x5	585.1 *	591.5	1.09	726.5	22.82
3	Gaskell67-29x5	512.1 *	512.1 *	0.00	529.4	3.38
4	Gaskell67-32x5	556.5	571.7	2.73	642.1	12.31
5	Gaskell67-32x5	504.3 *	511.4	1.41	577.4	12.91
6	Gaskell67-36x5	460.4 *	470.7	2.24	492.2	4.57
7	Ch69-50x5	549.4	582.7	6.06	653.9	12.22
8	Ch69-75x10	744.7	886.3	19.01	952.1	7.42
9	Ch69-100x10	788.6	889.4	12.78	1080.9	21.53
10	Perl83-12x2	204 *	204 *	0.00	204	0.00
11	Perl83-55x15	1074.8	1136.2	5.71	1145.5	0.82
12	Perl83-85x7	1568.1	1656.9	5.66	1701	2.66
13	Perl83-318x4		580680.2		625488.5	7.72
14	Perl83-318x4		747619		744381.8	-0.43
15	Min92-27x5	3062 *	3062 *	0.00	4015.6	31.14
16	Min92-134x8		6238		7162.7	14.82
17	Daskin95-88x8	356.4	384.9	8.00	591.5	53.68
18	Daskin95-150x10	43406	46642.7	7.46	48722.5	4.46
19	Or76-117x14	12048.4	12474.2	3.53	20563	64.84
Média aritmética				4.89		14.57

$w = \text{capacidade dos veículos.}$

Resultados: Rotas dos veículos apoiadas nos CA.

Passo 1. Resolver o PLAC tal como formulado na página 123.

Passo 2. Para cada CA instalado e respectivos clientes aplicar o algoritmo de Clarke-Wright [47].

Por aplicação do algoritmo 9 às 19 instâncias foram obtidos os resultados constantes na coluna referente aos Custos da Solução obtida pelo Método Sequencial (CSMS) da tabela 8.8. Na coluna (var%) é indicada a variação percentual face ao custo da melhor solução heurística. Em média obtém-se uma variação de 14,57%, muito acima do limite de 10% indicado por Srivastava e revelando mais uma vez a boa qualidade dos resultados proporcionados pelo algoritmo 2.

Apesar dos bons resultados, não podem estes ser dissociados dos condicionalismos que envolveram a concepção do algoritmo 2. Sendo certo que a obtenção de boas soluções foi desde logo um objectivo a alcançar, também o é que o algoritmo procurou criar as melhores condições para avaliação dos diferentes métodos de agrupamento e medidas de proximidade. Não fosse a contenção na introdução de procedimentos que pudessem contribuir para atenuar as diferenças entre os métodos de agrupamento e seria possível obter algumas melhorias na solução final. Por exemplo, sairiam melhoradas

algumas soluções acrescentando ao algoritmo 2 um procedimento iterativo composto pelos dois passos seguintes:

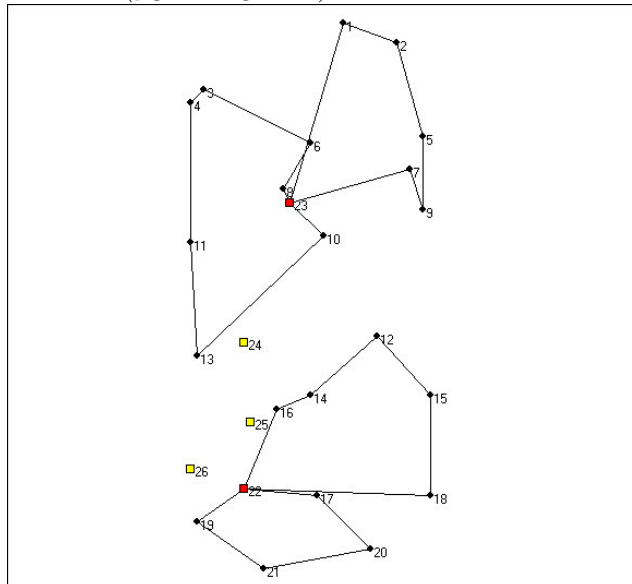
Passo 5. Determinar a solução do PCV em cada rota (incluindo o CA).

Passo 6. Aplicar aos clientes um procedimento de melhoramento do tipo *2-optimal*, respeitando as restrições de capacidade. Se houver alteração das rotas voltar ao passo 5.

Desta forma seria possível melhorar os percursos do caixeiro viajante que, por acção do passo de localização, tivessem sofrido desajustamentos e efectuar algumas trocas admissíveis de clientes, sempre na tentativa de diminuir o custo total.

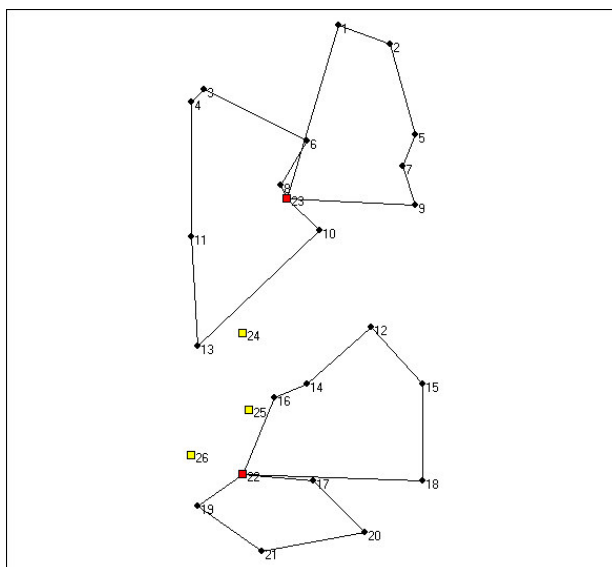
Exemplo 26

Considere-se a melhor solução heurística da instância 1 (*Gaskell67-21*×5). Esta solução pode ser obtida com a versão V2 do algoritmo 2, usando a medida de proximidade *Ligação Completa*, isto é, como o par (V2,LC). Esta solução admite um custo de 435,90 e é composta pelas rotas $Rota[1]=\{23,1,2,5,9,7\}$, $Rota[2]=\{23,10,13,11,4,3,6,8\}$, $Rota[3]=\{22,16,14,12,15,18\}$ e $Rota[4]=\{22,17,20,21,19\}$ com capacidades 5200, 5800, 5500 e 6000 respectivamente (figura seguinte).

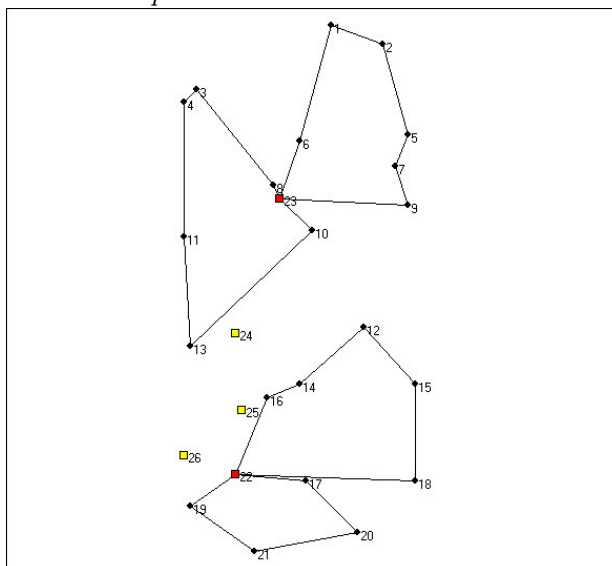


A partir desta solução é possível alcançar a solução óptima, apresentada no apêndice B (p. 278), com a simples aplicação do procedimento iterativo composto pelos passos 5 e 6.

O passo 5 conduz à alteração do traçado da rota $Rota[1]=\{23,1,2,5,9,7\}$ que passa a ser $Rota[1]=\{23,1,2,5,7,9\}$, com uma redução de custo de 4,271 (figura seguinte).



A passagem ao passo 6 conduz à tentativa de afectação de cada cliente a outra rota. A única admissível e proveitosa é a transferência do cliente 6, com encomenda de 800 unidades, da rota 2 para a rota 1. A poupança em termos de custo é de 6,733. A figura seguinte mostra a nova solução. O seu custo é de 424,896. Volta-se ao passo 5 e 6 mas não há alteração e o processo iterativo termina. Conforme se pode confirmar no apêndice B, a solução obtida é óptima.



8.8 Síntese

Em face da extraordinária complexidade dos PLDC, a resolução heurística é a via mais promissora para encontrar boas soluções para problemas de média e grande dimensão. No capítulo que agora termina foi apresentado um algoritmo heurístico sequen-

cial baseado na Análise de Grupos. O algoritmo apela à simplicidade de procedimentos e evita a inclusão de outros factores de perturbação, para além do processo inicial de agrupamento. Desta forma estão criadas as condições para permitir uma correcta avaliação de 4 técnicas de agrupamento (hierárquico e não hierárquico) e, em cada uma delas, de 6 medidas de proximidade (Ligação Simples, Ligação Completa, Média de Grupo, Centróide, Ward e *Saving*).

Foram realizados testes computacionais sobre 19 instâncias do PLDC, construídas a partir de ficheiros de dados dispersos pela literatura. Analisando a taxa de sucesso (complementada por uma AFC e uma ACP), o desvio relativo médio da MSC e os resultados após uniformização dos dados é possível apresentar uma sequenciação das várias versões por ordem decrescente de eficácia: V1, V3, V2 e V4, sendo que a versão V1 e V3 se encontram muito próximas. Relativamente às medidas de proximidade a análise foi mais inconclusiva; no entanto, é de assinalar algum equilíbrio entre as medidas LC, MG, CT e WA, com ligeira vantagem da CT, enquanto que a medida LS apenas se mostrou adequada à versão V1. A medida SA apresenta os piores resultados.

A uniformização dos dados permite uma análise dos valores médios após cada passo do algoritmo, revelando as qualidades do passo de melhoramento, que reduz significativamente o custo das rotas em todas as versões.

Em termos absolutos, os melhores resultados heurísticos apresentam um *Gap* médio de 4,89% ou, provavelmente, em termos reais, um valor ainda menor; de facto e tendo em conta a distribuição dos valores constata-se que o valor mediano é de 3,13%. Este resultado garante o bom desempenho do algoritmo 2, confirmado pela comparação com os resultados obtidos por aplicação de um algoritmo sequencial clássico. Desta vez, as soluções apresentam valores médios 14,57% piores que os obtidos com o algoritmo 2.

Apesar de ser possível realçar uma ou outra versão do algoritmo e esta ou aquela medida de proximidade, os resultados mostram mais uma vez que não é possível identificar um método de agrupamento ou um par (algoritmo, medida de proximidade), como sendo claramente e sem margem para dúvidas o mais eficaz. Por vezes, as reduzidas diferenças de resultados observados com as várias combinações (algoritmo, medida de proximidade) não justificam por si só a escolha de uma determinada solução. Sendo assim, é aconselhável resolver o PLDC sob as várias combinações, proporcionando a vantagem de poder escolher entre múltiplas soluções alternativas.

Capítulo 9

Conclusões Gerais e Perspectivas Futuras

A sociedade actual, complexa e global, assenta a seu desenvolvimento vertiginoso na mobilidade constante dos seus intervenientes. É necessário estar próximo das solicitações e atendê-las quase instantaneamente com a máxima eficiência. Quando, na década de 60, surgiram os primeiros trabalhos sobre Problemas de Localização-Distribuição (PLD) era latente o carácter de subalternização da distribuição em relação à localização. Os PLD eram vistos e abordados como sendo, fundamentalmente, problemas de localização aos quais se "colava" a determinação de percursos de distribuição. Os tempos mudaram e basta olhar à nossa volta para sentir que a mobilidade constante da sociedade e das organizações volatilizou o conceito de localização. A distribuição foi ganhando importância acrescida e hoje é, sem dúvida, uma peça essencial deste processo, que se deseja conjunto e simultâneo, com o reconhecimento por parte dos gestores e investigadores das vantagens de uma avaliação integrada da Localização e Distribuição. Na verdade, é difícil identificar decisões de localização que não tenham subjacente algum tipo de distribuição a partir dos Centros de Acção (CA) instalados. Também não parece aceitável conceber planos de distribuição sem identificar qualquer tipo de Centro que suporte o sistema. Neste sentido a visão integrada da Localização e Distribuição deu lugar a uma nova classe de problemas logísticos designados por Problemas de Localização-Distribuição.

A identificação e integração dos PLD no universo mais abrangente da logística foi a pedra de toque para o início deste trabalho. A logística é o meio e a cultura que envolvem os PLD e como tal é necessário aproximar a visão predominantemente descritiva das ciências económicas de uma aproximação simbólica e formal que é característica das ciências matemáticas. A sociedade actual, marcadamente economicista, é suportada, mais do que nunca, por pilares de decisão logística, ocupando a localização-distribuição um lugar central neste edifício. A velha máxima da "localização estratégica" que, na verdade, pressupõe sempre uma boa estratégia de acessibilidade (distribuição), não

está velha; pelo contrário, ao nível empresarial, político ou militar tem sido usada como argumento para realçar a importância das organizações, regiões ou países.

Segue-se uma revisão bibliográfica anotada com referência a 84 artigos sobre PLD. Além da anotação, em apêndice próprio, os textos obedecem a uma organização tendo em conta o ano de publicação, o meio de publicação e os autores. A partir do seu conteúdo, as publicações sobre PLD são alvo de uma organização e classificação que permite obter uma visão mais firme e clara sobre o passado da investigação nesta área, antever algumas tendências de investigação ou identificar sub-áreas com potencialidades autónomas, como por exemplo, a Localização-Distribuição com Caminhos. São também identificadas 9 teses de doutoramento sobre PLD.

A análise taxonómica com uma proposta de formalização de base posicional e a abordagem da complexidade do PLD fecham a primeira parte desta tese, que se dedica ao estudo de PLD em geral.

A literatura existente sobre PLD é bastante diversificada. Os PLD surgem nas mais variadas situações práticas e, na maior parte dos textos, apresentam características muito próprias e uma formalização matemática quase sempre complexa. Esta tese procura seguir por um caminho de sistematização e fundamentação de uma investigação básica sobre PLD. Neste sentido é apresentado e estudado um modelo simples mas representativo, com dois níveis, designado por PLD com capacidade (PLDC). Integrando somente as características essenciais e mais comuns, o PLDC pretende assumir-se como um modelo de referência, com aspectos elementares ao nível teórico mas suficientemente completo para se identificar com muitas situações reais. Aproveitando alguma referência à interligação na mesma função objectivo de custos relacionados com a localização e custos de distribuição, são tecidas algumas considerações sobre o assunto propondo, a partir de outros estudos e de novas experiências, que o custo de localização se situe próximo do custo médio de ligação entre clientes. É ainda realçada a importância da capacidade limitada dos CA no sentido de evitar que custos de localização, pouco fundamentados, possam desequilibrar a solução.

Prosseguindo no estudo de PLD com capacidade, são propostas formulações matemáticas com dois e três índices para o problema orientado e não orientado. As formulações procuram encontrar um equilíbrio entre a via teórica minimalista, no sentido da inclusão somente das restrições essenciais, e a necessidade prática de formulações mais fortalecidas, no sentido de serem menos dependentes das restrições de eliminação de sub-ciclos e cadeias que surgem em número exponencial.

A partir de uma formulação com dois índices é construído um algoritmo de resolução exacta que permite alcançar a solução óptima em PLDC de pequena dimensão ou então, recorrendo à relaxação de problemas maiores, obter limites inferiores.

A análise de complexidade dos PLD não deixa dúvidas sobre a necessidade de recorrer a algoritmos heurísticos para resolver problemas de média e grande dimensão. Neste sentido é proposto um algoritmo heurístico sequencial em 4 passos que faz uso

de técnicas da Análise de Grupos. São propostas e avaliadas 4 versões do algoritmo heurístico (duas hierárquicas e duas não hierárquicas) tendo em conta os processos de agrupamento empregues, assim como 6 medidas de proximidade.

A realização de testes computacionais a partir de 19 instâncias do PLDC revela o bom desempenho da versão V1 do algoritmo (algoritmo hierárquico de uma fase), seguida de perto pela versão V3. É um resultado algo surpreendente tendo em conta que tradicionalmente os métodos hierárquicos são mais usados nas ciências sociais ou biológicas, onde está em causa apenas uma intenção taxonómica sobre os indivíduos. Relativamente às medidas de proximidade, é menos visível qualquer realce, no entanto, é possível confirmar o bom desempenho das medidas Ligação Completa (LC), Média de Grupo (MG), Centróide (CT) e Ward (WA), com as medidas Ligação Simples (LS) e *Saving* (SA) a revelarem menos eficácia.

As pequenas diferenças de resultado, observadas sob o uso de técnicas distintas de agrupamento, não permitem afirmar com convicção que um determinado método de agrupamento alcança sempre as melhores soluções, sobrepondo-se aos restantes. Pelo contrário, é uma evidência a necessidade de testar várias técnicas de agrupamento e medidas de proximidade, escolhendo a solução mais adequada e aproveitando a vantagem de possuir várias alternativas para enquadrar os objectivos de gestão.

Ao longo deste trabalho foram sucessivamente deixadas várias pistas para um trabalho de investigação que possa aprofundar algumas questões aqui iniciadas.

O papel da localização-distribuição (LD) no seio dos sistemas logísticos deve continuar a ser clarificado. Neste sentido, são necessários estudos que permitam quantificar e relativizar com mais detalhe os custos inerentes à LD. Por esta via será possível realçar a importância do investimento na investigação em LD, nas estruturas físicas que a suportam e no aperfeiçoamento das estratégias decisórias nesta área. No caso português não é difícil prever que um tratamento mais eficiente das questões relacionadas com a logística da LD conduziria a aumentos de produtividade assinaláveis.

A grande variedade de PLD existentes motiva a procura de estruturas classificatórias claras. Apesar do tratamento que foi dado a este tema, o futuro conduzirá certamente a aperfeiçoamentos e mesmo a novas propostas de taxonomia.

O estudo continuado e o aperfeiçoamento das formulações é uma condição necessária para a melhor compreensão do PLDC. Na sequência (ou simultaneamente) é necessário insistir na construção de melhores algoritmos de resolução exacta. A depuração das formulações, a introdução de restrições que as fortaleçam e o recurso à relaxação das restrições de integralidade pode conduzir à resolução de PLDC de maior dimensão. Muito trabalho de prospecção está ainda por fazer relativamente às potencialidades de aplicação prática das formulações com três índices e continuam em aberto outras propostas de formulação em termos de fluxo [82].

As propostas de resolução heurística com recurso a técnicas de agrupamento não

se esgotam neste trabalho. Desde logo é premente o aperfeiçoamento das técnicas de construção de grupos com capacidade, testando e estudando com mais profundidade as propostas de Mulvey e Beck [161], as potencialidades do coeficiente de proximidade proposto neste trabalho (p. 175) e as reais potencialidades dos processos de melhoramento na reposição da capacidade. Embora tenham sido testados os métodos de agrupamento mais conhecidos, o trabalho pode também continuar neste campo com a introdução de novas técnicas de identificação de grupos. Na parte final deste texto foi ilustrado um possível procedimento de melhoramento da solução admissível do PLDC; no entanto, esta é uma área que promete contribuir num futuro próximo para a obtenção de melhores soluções do PLDC, continuando em aberto a investigação sobre algoritmos eficientes de melhoramento das soluções admissíveis do PLDC, em especial do tipo *3-optimal*.

A investigação relatada neste trabalho permitiu clarificar alguns aspectos relacionados com a análise, modelação e resolução de PLD mas serviu também para colocar novas perguntas, identificar caminhos ainda por explorar, reconhecer as limitações colocadas pelo actual estado de desenvolvimento técnico e, acima de tudo, aguçar a curiosidade.

Apêndice A

Descrição dos Ficheiros de Dados

A.1 Introdução

Neste apêndice são apresentados os ficheiros de dados que estiveram na base da construção das 19 instâncias do PLDC (tabela 7.1), sobre as quais foram efectuados os testes computacionais. Os ficheiros foram recolhidos directamente da literatura ou então são o resultado de adaptação de ficheiros de dados relativos a problemas de rotas de veículos, também publicados¹.

A designação atribuída a cada instância contém em si mesma alguma informação relevante. Por exemplo, a instância Gaskell67-21x5 foi construída com base em dados publicados por Gaskell, no ano de 1967 [81], sendo constituída por 21 clientes e 5 potenciais CA.

A informação respeitante a cada instância do PLDC é registada num par de ficheiros; um que contém a informação relativa aos clientes e outro que guarda a informação sobre os CA. Cada um destes ficheiros é identificado acrescentando a designação Cli ou CA à denominação já apresentada. Por exemplo, Gaskell67**Cli**21x5, contém os dados relativos aos clientes e Gaskell67**CA**21x5 os dados relativos aos potenciais CA.

Alguns dados têm origem em problemas reais, outros são artificiais e outros ainda, são algo misteriosos, não sendo dada qualquer informação pelos autores, acerca da sua origem. As tabelas A.1 e A.2 ilustram o conhecimento existente de acordo com as fontes bibliográficas. Ao todo, são apresentados neste apêndice 17 ficheiros de dados relativos aos clientes e os respectivos 17 ficheiros de dados correspondentes aos potenciais CA.

O formato dos ficheiros de clientes e de CA é idêntico ao usado por Perl [176]. Em cada linha são indicados os dados relativos a cada indivíduo (seja cliente ou CA). As 4 colunas dos ficheiros de clientes referem-se ao número do cliente, às suas coordenadas (abcissa e ordenada) e à encomenda que lhe está atribuída.

Alguns ficheiros encontram-se integralmente na literatura, outros só parcialmente

¹Todos os ficheiros estão disponíveis na Internet no endereço <http://sweet.ua.pt/~iscf143/>. Conferido em 7 de Junho de 2004.

Tabela A.1: Ficheiros de clientes. Origem dos dados de acordo com os autores.

	Ficheiro	Origem dos dados
1	Gaskell67Cli21x5	Não especificada
2	Gaskell67Cli22x5	Não especificada
3	Gaskell67Cli29x5	Não especificada
4	Gaskell67Cli32x5	Não especificada
5	Gaskell67Cli36x5	Artificial: Grelha de pontos
6	Ch69Cli50x5	Não especificada
7	Ch69Cli75x10	Não especificada
8	Ch69Cli100x10	Não especificada
9	Perl83Cli12x2	Não especificada
10	Perl83Cli55x15	Artificial: Concentração ao centro
11	Perl83Cli85x7	Artificial: Distribuição uniforme
12	Perl83Cli318x4	Real: Comp. americana de distribuição
13	Min92Cli27x5	Real: Comp. americana de <i>hardware</i>
14	Min92Cli134x8	Real: Comp. americana de <i>hardware</i>
15	Daskin95Cli88x8	Real: Maiores cidades americanas
16	Daskin95Cli150x10	Real: Maiores cidades europeias
17	Or76Cli117x14	Real: Hospitais na zona de Chicago

Tabela A.2: Ficheiros de CA. Origem dos dados de acordo com os autores.

	Ficheiro	Origem dos dados
1	Gaskell67CA21x5	Artificial
2	Gaskell67CA22x5	Artificial
3	Gaskell67CA29x5	Artificial
4	Gaskell67CA32x5	Artificial
5	Gaskell67CA36x5	Artificial
6	Ch69CA50x5	Artificial
7	Ch69CA75x10	Artificial
8	Ch69CA100x10	Artificial
9	Perl83CA12x2	Não especificada
10	Perl83CA55x15	Artificial: Concentração ao centro
11	Perl83CA85x7	Artificial: Distribuição uniforme
12	Perl83CA318x4	Real: Comp. americana de distribuição
13	Min92CA27x5	Artificial
14	Min92CA134x8	Artificial
15	Daskin95CA88x8	Real: Maiores cidades americanas
16	Daskin95CA150x10	Real: Maiores cidades europeias
17	Or76CA117x14	Real: Hospitais na zona de Chicago

Tabela A.3: Formato e tipo dos ficheiros de clientes.

	Ficheiro	Número	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	Gaskell67Cli21x5	O	O	O	O
2	Gaskell67Cli22x5	O	O	O	O
3	Gaskell67Cli29x5	O	O	O	O
4	Gaskell67Cli32x5	O	O	O	O
5	Gaskell67Cli36x5	O	A	A	A
6	Ch69Cli50x5	O	O	O	O
7	Ch69Cli75x10	O	O	O	O
8	Ch69Cli100x10	O	O	O	O
9	Perl83Cli12x2	O	O	O	O
10	Perl83Cli55x15	O	O	O	O
11	Perl83Cli85x7	O	O	O	O
12	Perl83Cli318x4	O	O	O	O
13	Min92Cli27x5	O	A	A	A
14	Min92Cli134x8	O	O	O	O
15	Daskin95Cli88x8	O	O	O	O
16	Daskin95Cli150x10	O	O	O	O
17	Or76Cli117x14	O	O	O	O
O=Conforme o original		N=Novo	A=Adaptado		

e outros ainda foram construídos de novo, em especial ficheiros relativos aos CA. A tabela A.3 indica se os ficheiros de clientes estão conforme o original (O), se foram construídos de novo (N) ou ainda se sofreram algum tipo de adaptação (A).

Os ficheiros de clientes, com excepção de dois casos, apresentam-se tal como foram propostos pelos respectivos autores. O ficheiro Gaskell67Cli36x5 obedece às indicações dadas por Gaskell [81] mas os valores foram adaptados. Trata-se de um problema artificial com uma grelha de 36 pontos (clientes) localizados num quadriculado de dimensões entre 20 e 70 e amplitude dos espaços de 10 (figura A.1). As encomendas também foram acrescentadas. São todas iguais a 25, de tal forma que veículos com capacidade 200 possam visitar até 8 clientes. Na sua origem, os dados relativos ao ficheiro Min92Cli27x5 estão relacionados com um problema de recolha [157]. Não houve neste caso uma alteração mas sim uma adaptação dos seus fins. A tabela A.4 mostra alguma informação relativa aos 17 ficheiros de clientes.

Como foi já referido, a cada ficheiro de clientes corresponde um ficheiro de potenciais CA que segue também a formatação sugerida por Perl [176]. As primeiras 3 colunas indicam o número do CA, a abcissa e a ordenada. A quarta indica a capacidade (em unidades de carga), a quinta o custo fixo e a sexta o custo variável unitário (em unidades monetárias).

Os ficheiros de Perl encontram-se conforme o original [176]. Os ficheiros de Daskin [58] e os de Or [173] também aproveitam alguma informação original uma vez que os CA são instalados nos clientes. Os restantes foram construídos propositadamente para

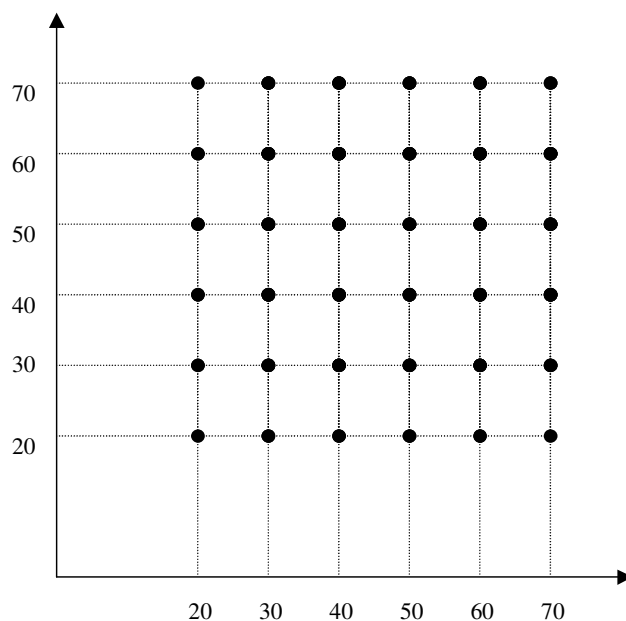


Figura A.1: Representação no plano dos clientes referentes aos dados do ficheiro Gaskell67Cli36x5.

Tabela A.4: Informação relativa aos ficheiros de clientes.

	Ficheiro	DMC	MinX	MaxX	MinY	MaxY	$\sum enc$
1	Gaskell67Cli21x5	37.3	128	164	182	264	22500
2	Gaskell67Cli22x5	60.1	208	324	181	278	10189
3	Gaskell67Cli29x5	56.0	104	224	331	410	12750
4	Gaskell67Cli32x5	37.6	261	336	378	475	29370
5	Gaskell67Cli36x5	31.7	20	70	20	70	900
6	Ch69Cli50x5	32.8	5	63	6	69	777
7	Ch69Cli75x10	33.5	6	70	4	76	1364
8	Ch69Cli100x10	34.1	2	67	3	77	1458
9	Perl83Cli12x2	15.5	8	34	9	33	240
10	Perl83Cli55x15	20.4	6	52	5	60	1100
11	Perl83Cli85x7	24.7	8	52	5	62	1700
12	Perl83Cli318x4	20223	511928	570640	241085	283500	188095
13	Min92Cli27x5	272	3873	4551	863	1358	8410
14	Min92Cli134x8	268	3904	4598	803	1327	7911
15	Daskin95Cli88x8	21	70	123	26	48	44840571
16	Daskin95Cli150x10	1159	375	4494	2810	6152	77968385
17	Or76Cli117x14	593	72	1361	93	2330	628
DMC=Distância média entre dois cliente $\sum enc$ =Somatório das encomendas dos clientes					MinX=Menor abcissa MaxX=Maior Abcissa		

Tabela A.5: Formato dos ficheiros de potenciais CA.

	Ficheiro	N^o	Abcissa	Ordenada	U	f_k	C.Variável
1	Gaskell67CA21x5	N	N	N	O	N	N
2	Gaskell67CA22x5	N	N	N	O	N	N
3	Gaskell67CA29x5	N	N	N	O	N	N
4	Gaskell67CA32x5	N	N	N	O	N	N
5	Gaskell67CA36x5	N	N	N	N	N	N
6	Ch69CA50x5	N	N	N	O	N	N
7	Ch69CA75x10	N	N	N	O	N	N
8	Ch69CA100x10	N	N	N	O	N	N
9	Perl83CA12x2	O	O	O	O	O	O
10	Perl83CA55x15	O	O	O	O	O	O
11	Perl83CA85x7	O	O	O	O	O	O
12	Perl83CA318x4	O	O	O	O	O	O
13	Min92CA27x5	N	N	N	N	N	N
14	Min92CA134x8	N	N	N	O	N	N
15	Daskin95CA88x8	N	O	O	N	A	N
16	Daskin95CA150x10	N	O	O	N	O	N
17	Or76CA117x14	N	O	O	O	O	N
O=Conforme o original		N=Novo		A=Adaptado			

este trabalho. A tabela A.5 resume esta informação.

Em todos os ficheiros construídos de raiz as coordenadas dos potenciais CA foram geradas aleatoriamente a partir das coordenadas dos clientes. Por exemplo, relativamente ao ficheiro Gaskell67CA21x5, as abcissas são números aleatórios entre a mínima (128) e a máxima (164) abcissa do ficheiro Gaskell67Cli21x5.

A capacidade dos CA foi determinada a partir do total de encomendas dos clientes (tabela A.4). O número de CA a instalar depende da sua capacidade. Relacionando a capacidade dos CA (tabela A.6) com o total de encomendas (tabela A.4) é possível concluir que serão instalados entre 1 e 3 CA.

Quanto ao custo fixo dos CA, tendo em conta o que foi observado no capítulo 7, houve a intenção de não o afastar muito da distância média entre os clientes (tabela A.4). No caso dos ficheiros de Daskin95CA88x8 este custo foi adaptado precisamente para acompanhar a distância média entre cidades.

O custo variável dos CA, ou custo por unidade de carga, é indicado só para manter o formato idêntico ao de Perl, não sendo necessário fazer uso destes dados na resolução do PLDC. Por isso, a sua entrada é nula excepto nos ficheiros fornecidos por Perl83 em que se mantém o original.

Tabela A.6: Descrição dos dados relativos aos CA.

	Ficheiro	U	f_k	Cust. Var.
1	Gaskell67CA21x5	15000	50	0
2	Gaskell67CA22x5	15000	50	0
3	Gaskell67CA29x5	15000	50	0
4	Gaskell67CA32x5	15000	50	0
5	Gaskell67CA36x5	15000	50	0
6	Ch69CA50x5	10000	40	0
7	Ch69CA75x10	10000	40	0
8	Ch69CA100x10	10000	40	0
9	Perl83CA12x2	280	100	0,74
10	Perl83CA55x15	550	240	0,74
11	Perl83CA85x7	850	372	0,74
12	Perl83CA318x4	217852-1309474	1250-1880	0,021-0,03
13	Min92CA27x5	9000	272	0
14	Min92CA134x8	3000	268	0
15	Daskin95CA88x8	25000000	25600-298900	0
16	Daskin95CA150x10	30000000	5000	0
17	Or76CA117x14	300	274,3-700	0
U =Capacidade dos CA f_k = Custo fixo dos CA Cust. Var.=Custo variável dos CA				

A.2 Ficheiros de Dados

Gaskell67Cli21x5			
Cientes	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	151	264	1100
2	159	261	700
3	130	254	800
4	128	252	1400
5	163	247	2100
6	146	246	400
7	161	242	800
8	142	239	100
9	163	236	500
10	148	232	600
11	128	231	1200
12	156	217	1300
13	129	214	1300
14	146	208	300
15	164	208	900
16	141	206	2100
17	147	193	1000
18	164	193	900
19	129	189	2500
20	155	185	1800
21	139	182	700

Gaskell67CA21x5					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust.Fixo	Cust.Var.
1	136	194	15000	50	0
2	143	237	15000	50	0
3	136	216	15000	50	0
4	137	204	15000	50	0
5	128	197	15000	50	0

Gaskell67Cli22x5			
Cientes	Abcissa	Ordenada	Incomenda
1	295	272	125
2	301	258	84
3	309	260	60
4	217	274	500
5	218	278	300
6	282	267	175
7	242	249	350
8	230	262	150
9	249	268	1100
10	256	267	4100
11	265	257	225
12	267	242	300
13	259	265	250
14	315	233	500
15	329	252	150
16	318	252	100
17	329	224	250
18	267	213	120
19	275	192	600
20	303	201	500
21	208	217	175
22	326	181	75

Gaskell67CA22x5					
CA	Adcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	244	248	15000	50	0
2	263	218	15000	50	0
3	234	210	15000	50	0
4	225	246	15000	50	0
5	320	221	15000	50	0

Gaskell67Cli29x5			
Cientes	Adcissa	Ordenada	Encomenda
1	218	382	300
2	218	358	3100
3	201	370	125
4	214	371	100
5	224	370	200
6	210	382	150
7	104	354	150
8	126	338	450
9	119	340	300
10	129	349	100
11	126	347	950
12	125	346	125
13	116	355	150
14	126	335	150
15	125	355	550
16	119	357	150
17	115	341	100
18	153	351	150
19	175	363	400
20	180	360	300
21	159	331	1500
22	188	357	100
23	152	349	300
24	215	389	500
25	212	394	800
26	188	393	300
27	207	406	100
28	184	410	150
29	207	392	1000

Gaskell67CA29x5					
CA	Adcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	203	398	15000	50	0
2	107	361	15000	50	0
3	197	354	15000	50	0
4	189	383	15000	50	0
5	159	377	15000	50	0

Gaskell67Cli32x5			
Cientes	Adcissa	Ordenada	Encomenda
1	298	427	700
2	309	445	400
3	307	464	400
4	336	475	1200
5	320	439	40
6	321	437	80
7	322	437	2000
8	323	433	900
9	324	433	600
10	323	429	750
11	314	435	1500
12	311	442	150
13	304	427	250
14	293	421	1600
15	296	418	450
16	261	384	700
17	297	410	550
18	315	407	650
19	314	406	200
20	321	391	400
21	321	398	300
22	314	394	1300
23	313	378	700
24	304	382	750
25	295	402	1400
26	283	406	4000
27	279	399	600
28	271	401	1000
29	264	414	500
30	277	439	2500
31	290	434	1700
32	319	433	1100

Gaskell67CA32x5					
CA	Adcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	264	435	35000	50	0
2	323	413	35000	50	0
3	285	427	35000	50	0
4	278	424	35000	50	0
5	266	422	35000	50	0

Gaskell67Cli36x5			
Cientes	Adcissa	Ordenada	Encomenda
1	20	20	25
2	20	30	25
3	20	40	25
4	20	50	25
5	20	60	25
6	20	70	25
7	30	20	25
8	30	30	25
9	30	40	25
10	30	50	25
11	30	60	25
12	30	70	25
13	40	20	25
14	40	30	25
15	40	40	25
16	40	50	25
17	40	60	25
18	40	70	25
19	50	20	25
20	50	30	25
21	50	40	25
22	50	50	25
23	50	60	25
24	50	70	25
25	60	20	25
26	60	30	25
27	60	40	25
28	60	50	25
29	60	60	25
30	60	70	25
31	70	20	25
32	70	30	25
33	70	40	25
34	70	50	25
35	70	60	25
36	70	70	25

Gaskell67CA36x5					
CA	Adcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	30	46	15000	50	0
2	37	39	15000	50	0
3	23	43	15000	50	0
4	56	38	15000	50	0
5	42	43	15000	50	0

Christofides69Cli50x5			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	37	52	7
2	49	49	30
3	52	64	16
4	20	26	9
5	40	30	21
6	21	47	15
7	17	63	19
8	31	62	23
9	52	33	11
10	51	21	5
11	42	41	19
12	31	32	29
13	5	25	23
14	12	42	21
15	36	16	10
16	52	41	15
17	27	23	3
18	17	33	41
19	13	13	9
20	57	58	28
21	62	42	8
22	42	57	8
23	16	57	16
24	8	52	10
25	7	38	28
26	27	68	7
27	30	48	15
28	43	67	14
29	58	48	6
30	58	27	19
31	37	69	11
32	38	46	12
33	46	10	23
34	61	33	26
35	62	63	17
36	63	69	6
37	32	22	9
38	45	35	15
39	59	15	14
40	5	6	7
41	10	17	27
42	21	10	13
43	5	64	11
44	30	15	16

(continua)

(continuação)

Christofides69Cli50x5			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	39	10	10
46	32	39	5
47	25	32	25
48	25	55	17
49	48	28	18
50	56	37	10

Christofides69CA50x5					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	10	49	10000	40	0
2	20	30	10000	40	0
3	5	25	10000	40	0
4	54	17	10000	40	0
5	43	53	10000	40	0

Christofides69Cli75x10				
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda	
1	22	22	18	
2	36	26	26	
3	21	45	11	
4	45	35	30	
5	55	20	21	
6	33	34	19	
7	50	50	15	
8	55	45	16	
9	26	59	29	
10	40	66	26	
11	55	65	37	
12	35	51	16	
13	62	35	12	
14	62	57	31	
15	62	24	8	
16	21	36	19	
17	33	44	20	
18	9	56	13	
19	62	48	15	
20	66	14	22	
21	44	13	28	
22	26	13	12	
23	11	28	6	
24	7	43	27	
25	17	64	14	
26	41	46	18	
27	55	34	17	
28	35	16	29	
29	52	26	13	
30	43	26	22	
31	31	76	25	
32	22	53	28	
33	26	29	27	
34	50	40	19	
35	55	50	10	
36	54	10	12	
37	60	15	14	
38	47	66	24	
39	30	60	16	
40	30	50	33	
41	12	17	15	
42	15	14	11	
43	16	19	18	
44	21	48	17	

(continua)

(continuação)

Christofides69Cli75x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	50	30	21
46	51	42	27
47	50	15	19
48	48	21	20
49	12	38	5
50	15	56	22
51	29	39	12
52	54	38	19
53	55	57	22
54	67	41	16
55	10	70	7
56	6	25	26
57	65	27	14
58	40	60	21
59	70	64	24
60	64	4	13
61	36	6	15
62	30	20	18
63	20	30	11
64	15	5	28
65	50	70	9
66	57	72	37
67	45	42	30
68	38	33	10
69	50	4	8
70	66	8	11
71	59	5	3
72	35	60	1
73	27	24	6
74	40	20	10
75	40	37	20

Christofides69CA75x10					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	44	41	10000	40	0
2	56	7	10000	40	0
3	40	72	10000	40	0
4	62	12	10000	40	0
5	46	5	10000	40	0
6	25	75	10000	40	0
7	69	22	10000	40	0
8	69	61	10000	40	0
9	51	67	10000	40	0
10	33	73	10000	40	0

Christofides69Cli100x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	41	49	10
2	35	17	7
3	55	45	13
4	55	20	19
5	15	30	26
6	25	30	3
7	20	50	5
8	10	43	9
9	55	60	16
10	30	60	16
11	20	65	12
12	50	35	19
13	30	25	23
14	15	10	20
15	30	5	8
16	10	20	19
17	5	30	2
18	20	40	12
19	15	60	17
20	45	65	9
21	45	20	11
22	45	10	18
23	55	5	29
24	65	35	3
25	65	20	6
26	45	30	17
27	35	40	16
28	41	37	16
29	64	42	9
30	40	60	21
31	31	52	27
32	35	69	23
33	53	52	11
34	65	55	14
35	63	65	8
36	2	60	5
37	20	20	8
38	5	5	16
39	60	12	31
40	40	25	9
41	42	7	5
42	24	12	5
43	23	3	7
44	11	14	18

(continua)

(continuação)

Christofides69Cli100x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	6	38	16
46	2	48	1
47	8	56	27
48	13	52	36
49	6	68	30
50	47	47	13
51	49	58	10
52	27	43	9
53	37	31	14
54	57	29	18
55	63	23	2
56	53	12	6
57	32	12	7
58	36	26	18
59	21	24	28
60	17	34	3
61	12	24	13
62	24	58	19
63	27	69	10
64	15	77	9
65	62	77	20
66	49	73	25
67	67	5	25
68	56	39	36
69	37	47	6
70	37	56	5
71	57	68	15
72	47	16	25
73	44	17	9
74	46	13	8
75	49	11	18
76	49	42	13
77	53	43	14
78	61	52	3
79	57	48	23
80	56	37	6
81	55	54	26
82	15	47	16
83	14	37	11
84	11	31	7
85	16	22	41
86	4	18	35
87	28	18	26
88	26	52	9

(continua)

(continuação)

Christofides69Cli100x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
89	26	35	15
90	31	67	3
91	15	19	1
92	22	22	2
93	18	24	22
94	26	27	27
95	25	24	20
96	22	27	11
97	25	21	12
98	19	21	10
99	20	26	9
100	18	18	17

Christofides69CA100x10					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	14	51	10000	40	0
2	23	41	10000	40	0
3	7	35	10000	40	0
4	47	40	10000	40	0
5	31	34	10000	40	0
6	3	69	10000	40	0
7	50	76	10000	40	0
8	52	30	10000	40	0
9	32	48	10000	40	0
10	14	54	10000	40	0

Perl83Cli12x2			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	34	31	20
2	29	32	20
3	24	33	20
4	17	29	20
5	8	28	20
6	33	27	20
7	24	25	20
8	31	23	20
9	30	17	20
10	16	16	20
11	10	14	20
12	15	9	20

Perl83CA12x2					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	25	19	280	100	0.74
2	14	24	280	100	0.74

Perl83Cli55x15			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	32	31	20
2	29	32	20
3	27	36	20
4	29	29	20
5	32	29	20
6	26	25	20
7	24	33	20
8	30	35	20
9	29	27	20
10	29	21	20
11	33	28	20
12	17	53	20
13	34	30	20
14	25	60	20
15	21	28	20
16	30	51	20
17	19	47	20
18	17	33	20
19	22	40	20
20	25	14	20
21	29	12	20
22	24	48	20
23	17	42	20
24	6	26	20
25	19	21	20
26	10	32	20
27	34	56	20
28	12	47	20
29	19	38	20
30	27	41	20
31	21	35	20
32	32	45	20
33	27	45	20
34	32	38	20
35	8	22	20
36	15	25	20
37	35	10	20
38	36	47	20
39	46	51	20
40	50	40	20
41	23	22	20
42	27	30	20
43	38	39	20
44	36	32	20

(continua)

(continuação)

Perl83Cli55x15			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	32	41	20
46	42	36	20
47	36	20	20
48	15	19	20
49	19	14	20
50	45	19	20
51	27	5	20
52	52	24	20
53	40	22	20
54	40	52	20
55	42	42	20

Perl83CA55x15					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	30	61	550	240	0.74
2	22	54	550	240	0.74
3	45	54	550	240	0.74
4	39	47	550	240	0.74
5	28	39	550	240	0.74
6	36	36	550	240	0.74
7	32	35	550	240	0.74
8	33	32	550	240	0.74
9	27	28	550	240	0.74
10	32	28	550	240	0.74
11	11	27	550	240	0.74
12	18	25	550	240	0.74
13	39	19	550	240	0.74
14	15	12	550	240	0.74
15	40	12	550	240	0.74

Perl83Cli85x7			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	32	31	20
2	34	45	20
3	27	36	20
4	29	29	20
5	32	29	20
6	26	25	20
7	24	33	20
8	30	35	20
9	29	27	20
10	29	21	20
11	33	28	20
12	17	58	20
13	40	12	20
14	25	60	20
15	21	28	20
16	30	51	20
17	19	47	20
18	17	33	20
19	22	40	20
20	25	14	20
21	29	12	20
22	24	48	20
23	17	42	20
24	26	17	20
25	19	21	20
26	10	32	20
27	34	56	20
28	12	47	20
29	19	38	20
30	27	41	20
31	21	35	20
32	32	45	20
33	27	45	20
34	32	38	20
35	8	22	20
36	15	25	20
37	35	16	20
38	36	47	20
39	46	51	20
40	50	40	20
41	23	22	20
42	27	30	20
43	38	39	20
44	36	32	20

(continua)

(continuação)

Perl83Cli85x7			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	32	41	20
46	42	36	20
47	36	26	20
48	15	19	20
49	19	14	20
50	46	19	20
51	27	5	20
52	52	24	20
53	40	22	20
54	40	52	20
55	42	42	20
56	47	48	20
57	51	48	20
58	50	55	20
59	48	57	20
60	27	22	20
61	42	56	20
62	35	53	20
63	27	55	20
64	46	25	20
65	43	58	20
66	43	62	20
67	43	12	20
68	37	61	20
69	35	60	20
70	25	62	20
71	19	61	20
72	22	54	20
73	16	58	20
74	15	54	20
75	16	45	20
76	21	8	20
77	32	18	20
78	33	13	20
79	34	8	20
80	52	22	20
81	49	17	20
82	44	15	20
83	48	12	20
84	15	34	20
85	19	28	20

Perl83CA85x7					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	39	47	850	372	0.74
2	28	48	850	372	0.74
3	32	35	850	372	0.74
4	32	28	850	372	0.74
5	37	22	850	372	0.74
6	23	18	850	372	0.74
7	15	12	850	372	0.74

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	547064	268520	3.5
2	543480	259490	2.75
3	543480	259420	312
4	532728	276990	447.5
5	550032	260610	17.75
6	565824	278670	11.25
7	541520	263760	3
8	530488	259140	224.75
9	546728	278810	49.5
10	549472	276150	290
11	558096	262920	25.25
12	536088	267330	0.25
13	546728	259210	32.75
14	537152	259070	70
15	534576	263760	16.25
16	543928	276080	54
17	535584	259210	393
18	556304	260820	18.25
19	531048	260260	210
20	546896	276990	68.5
21	544600	262780	1.5
22	562688	269290	129
23	560168	264320	2159.5
24	542360	264740	120.75
25	552048	268380	29
26	570640	259070	91
27	550144	271110	25.5
28	538664	268870	3.25
29	538664	268800	873.25
30	539280	264810	272.75
31	531496	275940	82.75
32	530320	264740	64.5
33	564816	265790	0.5
34	564816	256860	721.25
35	531664	270900	5
36	531048	262640	18
37	569688	275380	188.5
38	553056	268520	1897
39	556080	263200	125.25
40	546112	266000	1419.25
41	548968	260960	120.75
42	556192	272160	721
43	556192	272090	1411.25
44	542864	270620	71.75

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	556248	272090	1.25
46	535024	278950	74.25
47	559048	275520	48
48	543760	268450	40.5
49	553168	269570	16
50	534968	277620	22
51	562464	275800	42
52	548352	266420	3402.5
53	536592	262640	382.25
54	536592	262640	218.25
55	534240	265440	416.5
56	559384	266560	2.75
57	542192	272720	75.5
58	530040	276500	1242.75
59	531104	274050	640.25
60	530320	277480	1
61	549416	263480	242
62	551376	259140	46.25
63	551376	259140	14.5
64	567056	265580	11
65	554960	267260	10.5
66	554960	267190	1.5
67	533288	272720	398
68	533288	272650	2.25
69	531496	276080	6.75
70	531440	276080	1098
71	531440	275940	94.75
72	567616	269290	80.25
73	565152	259210	545
74	549640	273210	0.25
75	549976	268380	69.75
76	540848	274190	0.25
77	540904	274260	329.5
78	540848	274260	27.25
79	544824	263340	9.75
80	544432	272440	25.5
81	562016	260960	40.25
82	547120	273840	74.5
83	552048	260890	87.5
84	560056	262080	80.75
85	535920	260610	14.5
86	534912	261870	146
87	559384	269080	9.75
88	545216	266280	38.75

(continua)

(continuação)

Per183Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
89	545216	266210	15.75
90	559328	278810	95
91	538608	275590	20
92	531720	269500	23.5
93	552664	276150	105.25
94	533456	270200	32.75
95	530656	271600	6499.5
96	531328	269990	212.75
97	533568	261450	764
98	533568	261380	3.5
99	556136	278250	519.75
100	530264	261870	1309.25
101	552888	263620	432.75
102	559552	270480	30.25
103	553560	272230	90.25
104	536480	279370	133.75
105	565488	262080	40.75
106	570136	279090	6.5
107	553000	266000	4.25
108	530544	272650	1539.75
109	545888	271950	308.25
110	545888	271810	280
111	564984	269290	146.5
112	537936	278810	32.5
113	553168	278390	17.25
114	552048	263830	67.25
115	569856	265860	9.25
116	535584	273210	824
117	535976	273280	3752.25
118	535864	273140	1
119	535808	273210	616.5
120	535864	273350	5.25
121	535808	273140	20
122	569856	269220	80
123	567616	263200	419
124	559328	273140	4
125	539336	274330	0.75
126	543536	278740	7
127	545552	260820	6.25
128	545552	260890	42
129	545160	263620	4795.25
130	545048	263480	4783
131	545384	263550	6
132	545048	263760	6.5

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
133	545104	263830	2.5
134	545160	263690	696.25
135	545272	263620	1599.5
136	545048	263970	10.5
137	545104	263690	6254.5
138	545328	263690	11.75
139	533456	275240	2
140	543088	260750	143
141	543088	260680	3
142	528640	282800	3.5
143	524776	258860	71.25
144	526400	282800	0.5
145	527800	273140	151
146	522144	269360	21
147	521584	256480	69
148	521192	277620	336.5
149	528360	268100	55.5
150	527800	278180	208
151	523824	275520	5.75
152	528080	260050	196.5
153	525616	256690	28.5
154	523992	278460	536
155	525168	268450	5.75
156	526400	265300	199.5
157	527800	275450	3.5
158	534800	283500	48.75
159	528976	275590	0.25
160	528472	270620	3
161	528304	274750	1101.75
162	528304	274470	1908
163	515928	269780	507.75
164	516320	269990	981
165	516040	269710	18
166	516208	269850	194
167	528920	259560	1804.25
168	529200	259700	5743.5
169	529200	259420	819
170	529032	272930	3.25
171	529088	272790	2828
172	529424	273350	25
173	529312	273350	16
174	529536	274400	559.75
175	529536	274470	1123
176	529480	273350	6.75

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
177	527744	272580	21.25
178	529144	272440	600.5
179	529312	275100	1086.25
180	529088	272580	291.25
181	529368	273280	4388.25
182	529312	274330	51
183	528808	272510	32.75
184	529256	274120	1548
185	528528	273000	1813.75
186	529256	273980	2.5
187	528584	274470	23.75
188	528976	272790	377.5
189	529032	272790	303.25
190	528920	272860	2.5
191	529312	273910	1030
192	529648	273000	0.75
193	528640	273700	402.5
194	528080	262500	42
195	529360	272300	490
196	528640	274750	16.25
197	521920	273840	32.25
198	530880	283500	284.25
199	521360	271470	135.5
200	525952	258580	1767.25
201	525560	259700	1.5
202	528416	258090	545.5
203	528640	264950	267.75
204	528640	264880	6
205	518616	266980	1711.25
206	524776	266280	405.5
207	524160	282800	48
208	526400	274820	26.25
209	530880	278320	1006.25
210	531216	278320	6307.75
211	529760	275800	893.5
212	522480	260470	7224
213	522368	260610	29
214	522144	260330	4615
215	522256	260470	83.75
216	522256	260190	75.75
217	522592	260260	6.25
218	522760	260260	9.5
219	524552	279510	338.75
220	525000	271180	150.75

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
221	524216	271180	23.75
222	523824	269500	2.25
223	553840	258650	10.5
224	557256	258650	9
225	557256	258650	26
226	565320	258650	116.75
227	541352	243112	1342
228	556304	242134	271.5
229	556304	242343	112.25
230	550088	245209	26
231	537488	257250	3401.25
232	546728	247953	214.75
233	544712	257670	434.75
234	539840	250452	0.5
235	550704	257320	5.5
236	548408	244930	1503.75
237	535416	254240	50
238	535416	254170	611.25
239	554176	248285	159
240	550816	248005	22.5
241	536648	254520	4.25
242	554400	246607	84.25
243	541856	251570	18
244	535304	251570	0.75
245	548464	241155	2689.25
246	545888	249194	640.5
247	548576	248355	954.75
248	556640	247516	88.25
249	547848	254590	68.5
250	547848	255080	200.75
251	548296	254590	933.25
252	541520	256060	9.25
253	551488	253960	0.25
254	530712	256060	22.5
255	545608	250731	292
256	537544	247726	0.5
257	537488	247726	462.5
258	554904	244860	5
259	539896	245209	3
260	559440	242413	7.25
261	531048	254940	131.25
262	548408	250661	79
263	550928	241085	2997.5
264	546728	243532	91.25

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
265	557200	243671	17.5
266	536256	244161	1104
267	531272	258090	553.5
268	545496	247726	751.75
269	545776	247027	338
270	534072	249893	1624
271	534072	249823	162.5
272	544712	246537	8.5
273	545888	246118	1899
274	535528	256900	8
275	546280	247796	1808.5
276	546504	248075	6413
277	546280	247865	5.25
278	546560	248145	297.25
279	546224	247935	432.25
280	546392	247376	188.75
281	545608	247656	1019
282	546168	248005	4331.5
283	546224	247865	518.75
284	546280	247516	1267.25
285	546168	247935	301.75
286	546560	247935	154.25
287	537488	248984	1511.5
288	544488	242903	59
289	539504	256690	21.25
290	542080	254380	36.25
291	544824	253960	3.5
292	543648	256900	1810.25
293	529816	244930	51
294	541352	248075	2.25
295	533842	254240	813.5
296	545272	244720	8.25
297	535752	250452	51.25
298	538160	252000	96.5
299	541352	246328	19
300	542696	245838	178.75
301	542696	245768	277.25
302	530768	247865	9.25
303	543536	252910	5
304	543536	252840	900.75
305	526816	250382	9
306	541184	249263	43.5
307	543032	241365	3.75
308	531832	251011	185.25

(continua)

(continuação)

Perl83Cli318x4			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
309	552944	249893	111.5
310	536984	252280	2558.75
311	536928	252490	844
312	536928	252350	5760.75
313	536984	252630	5131.5
314	536984	252560	4904.75
315	536872	252420	1.75
316	537040	252630	3485.25
317	536984	252420	2.75
318	532896	256550	23.75

Perl83CA318x4					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	530320	271950	1309474	1879.58	0.029
2	544432	262920	367639	1406.25	0.021
3	546616	247586	317852	1250	0.03
4	537936	252280	217852	1354.15	0.03

Min92Cli27x5			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	3873	1165	550
2	3915	1225	810
3	3928	1274	210
4	4145	1176	210
5	4163	1214	350
6	4170	1206	200
7	3926	1274	350
8	3926	1275	200
9	3983	1167	310
10	3965	1169	500
11	3966	1150	430
12	4266	1261	300
13	4263	1259	250
14	4242	1226	250
15	4211	1249	300
16	4234	1120	290
17	4233	1121	350
18	4376	1358	500
19	4348	1327	120
20	4364	1276	150
21	4551	1240	410
22	4329	876	250
23	4329	863	380
24	4268	1053	100
25	4129	1002	130
26	4004	1095	200
27	3995	1048	310

Min92CA27x5					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	4033	1316	9000	272	0
2	4121	1250	9000	272	0
3	3953	1207	9000	272	0
4	3993	1054	9000	272	0
5	4525	926	9000	272	0

Min92Cli134x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	3921	1238	84
2	3904	1240	71
3	3913	1250	109
4	4153	1214	123
5	4182	1225	62
6	4150	1206	63
7	4187	1322	2
8	4138	1196	70
9	4152	1218	13
10	4167	1218	65
11	4160	1219	12
12	4166	1212	79
13	4187	1327	54
14	3928	1276	51
15	4150	1195	75
16	4188	1324	18
17	4169	1193	43
18	4184	1227	40
19	4093	1227	43
20	4170	1205	40
21	4140	1207	36
22	4112	1191	30
23	4150	1196	1
24	4113	1271	34
25	4171	1224	31
26	4145	1178	50
27	4166	1213	57
28	3910	1248	26
29	4195	1205	115
30	4267	1054	2
31	4272	1053	67
32	4154	1156	36
33	4165	1144	36
34	4249	1058	32
35	4229	1129	61
36	4221	1049	64
37	4154	1157	55
38	4254	1057	17
39	4231	1114	86
40	4262	1080	35
41	4225	1004	44
42	4189	990	63
43	4185	1086	33
44	4184	1058	18

(continua)

(continuação)

Min92Cli134x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	4272	1054	1
46	4195	1206	6
47	4305	1156	36
48	4203	1246	69
49	4313	1159	247
50	4386	1092	1
51	4213	1256	94
52	4217	1304	87
53	4242	1223	64
54	4229	1218	2
55	4374	1123	18
56	4248	1223	41
57	4234	1119	56
58	4379	1125	33
59	4376	1098	64
60	4391	1107	35
61	4386	1093	72
62	4209	1250	56
63	4201	1201	131
64	4201	1180	66
65	4212	1250	2
66	4382	1109	32
67	4368	1261	4
68	4368	1262	273
69	4541	992	5
70	4495	1077	86
71	4543	994	6
72	4478	1113	137
73	4470	1193	57
74	4450	1021	25
75	4550	1240	45
76	4474	1126	47
77	4478	1114	4
78	4476	1110	34
79	4541	991	35
80	4499	1250	42
81	4454	990	111
82	4303	941	63
83	4475	929	8
84	4380	1011	3
85	4266	990	31
86	4448	980	28
87	4279	1053	73
88	4393	1077	64

(continua)

(continuação)

Min92Cli134x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
89	4347	954	50
90	4454	991	1
91	4410	963	15
92	4576	1015	86
93	4475	930	29
94	4360	835	57
95	4330	875	124
96	4469	803	16
97	4598	823	100
98	4391	803	16
99	4295	897	45
100	4270	895	35
101	4244	912	106
102	4255	929	30
103	4414	881	11
104	4390	804	38
105	4598	822	5
106	4329	861	155
107	4414	882	27
108	3921	1008	33
109	3935	1025	142
110	4011	1122	55
111	4001	1120	273
112	4011	1130	176
113	4010	1139	158
114	4127	1000	70
115	4083	1014	15
116	4048	1090	220
117	4126	1001	106
118	3999	1120	114
119	3931	1018	166
120	4001	1117	18
121	4020	1176	45
122	4022	1147	47
123	4021	1126	8
124	4005	1093	2
125	4005	1094	21
126	4239	934	87
127	3917	1010	64
128	3987	1021	26
129	3996	1047	148
130	4012	1137	212
131	4005	1026	176
132	3935	1026	32

(continua)

(continuação)

Min92Cli134x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
133	4083	1015	10
134	3987	1022	1

Min92CA134x8					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	4038	1323	3000	268	0
2	4150	1164	3000	268	0
3	3979	1118	3000	268	0
4	4452	980	3000	268	0
5	4280	934	3000	268	0
6	4025	1009	3000	268	0
7	4548	962	3000	268	0
8	4594	1072	3000	268	0

Daskin95Cli88x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	74	41	7322564
2	118	34	3485398
3	88	42	2783726
4	95	30	1630553
5	75	40	1585577
6	117	33	1110549
7	83	42	1027974
8	97	33	1006877
9	112	34	983403
10	99	29	935933
11	122	37	782248
12	77	39	736014
13	86	40	731327
14	123	38	723959
15	82	30	635230
16	83	40	632910
17	88	43	628088
18	90	35	610337
19	77	39	606900
20	71	42	574283
21	122	48	516259
22	106	32	515342
23	82	41	505616
24	90	30	496938
25	87	36	488374
26	105	40	467610
27	98	30	465622
28	97	33	447619
29	98	35	444719
30	123	46	437319
31	95	39	435146
32	118	34	429433
33	111	32	405390
34	90	39	396685
35	81	35	395934
36	84	34	394017
37	76	37	393069
38	107	35	384736
39	122	38	372242
40	80	40	369879
41	121	39	369365
42	93	45	368383
43	96	36	367302
44	85	39	364040

(continua)

(continuação)

Daskin95Cli88x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	80	26	358548
46	120	37	354202
47	96	41	335795
48	84	42	332943
49	79	43	328123
50	97	38	304011
51	93	45	272235
52	91	30	219531
53	79	36	207951
54	77	38	203056
55	90	32	196637
56	94	42	193187
57	97	41	191972
58	89	43	191262
59	86	32	187106
60	92	35	175795
61	71	42	160728
62	112	41	159936
63	73	42	139739
64	85	43	127321
65	116	44	125738
66	84	30	124773
67	96	39	119883
68	123	45	107786
69	90	40	105227
70	74	43	101082
71	81	34	98052
72	75	40	88675
73	82	38	57287
74	106	36	55859
75	77	40	52376
76	105	41	50008
77	101	47	49256
78	120	39	40443
79	72	43	36006
80	92	39	35481
81	123	47	33840
82	77	39	33187
83	76	39	27630
84	85	38	25968
85	112	47	24569
86	70	44	21325
87	100	44	12906
88	73	44	8247

(continuação)

Daskin95Cli88x8			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
81	500	198	33840
82	66	123	33187
83	57	123	27630
84	142	113	25968
85	396	198	24569
86	0	170	21325
87	283	170	12906
88	28	170	8247

Daskin95CA88x8					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	74	41	25000000	189,600	0
2	118	34	25000000	244,500	0
3	88	42	25000000	78,700	0
4	95	30	25000000	58,000	0
5	75	40	25000000	49,400	0
6	117	33	25000000	189,400	0
7	83	42	25000000	25,600	0
8	97	33	25000000	78,800	0

Daskin95Cli150x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	1990	5152	7393809
2	3338	5252	3289537
3	1629	4042	2905108
4	3250	4189	2649459
5	2234	4886	2113003
6	3000	5355	1688267
7	3637	4822	1543498
8	2217	4140	1497666
9	2919	4548	1302045
10	3807	5933	1239057
11	3158	4814	1161053
12	3257	5568	1096056
13	1375	5333	993279
14	3427	4085	992711
15	1809	5248	985858
16	2697	5095	966829
17	2435	5084	958816
18	2768	4508	898434
19	2537	4331	815086
20	3075	5991	787447
21	4372	3798	757441
22	1961	3948	741945
23	2489	5237	719518
24	1402	3740	704488
25	3336	3812	684792
26	2868	5012	645529
27	2893	4442	628840
28	1573	5587	609383
29	1911	4165	607018
30	2700	5147	589863
31	2448	5193	589077
32	2748	5151	588292
33	2919	4879	575426
34	4494	6017	574662
35	2679	5124	568314
36	1086	3872	558139
37	1558	3672	539294
38	2881	5308	528153
39	2675	5143	517661
40	2973	5240	516780
41	3201	5772	503710
42	3105	4945	486771
43	1701	5342	466629
44	2428	5208	444358

(continua)

(continuação)

Daskin95Cli150x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	2483	4576	444085
46	2442	5122	444068
47	1852	5339	421807
48	1845	5381	420316
49	3374	5105	413617
50	3240	5135	409807
51	1740	5146	409310
52	4295	4064	407815
53	2145	4362	406192
54	1775	5348	394307
55	2720	5148	387603
56	1678	5595	380505
57	3134	4450	380250
58	3124	4378	375480
59	2718	5126	368589
60	1887	3798	366319
61	457	2810	365968
62	1707	4325	351115
63	2265	3957	350654
64	3508	3750	337834
65	2727	4370	334120
66	2854	4738	333447
67	3687	4112	331739
68	2853	5203	322016
69	1526	4165	319380
70	1887	5264	319081
71	1523	3788	316079
72	2710	5073	311761
73	1964	5375	309144
74	2847	4950	305918
75	1850	5242	295042
76	1825	5380	290384
77	1129	4222	287790
78	1952	3835	283571
79	1682	5148	279538
80	1843	4723	278840
81	2711	5151	278059
82	2840	4900	277487
83	3233	4543	272086
84	1882	5297	271387
85	2776	4858	270455
86	1433	4353	268286
87	1781	5301	266662
88	2642	5120	266426

(continua)

(continuação)

Daskin95Cli150x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
89	2823	5008	266019
90	2762	5196	265514
91	1138	4115	263562
92	3555	3819	259033
93	1785	5259	258113
94	3099	4544	256108
95	3292	5083	256064
96	1407	5460	255118
97	3089	4836	252342
98	1584	5038	249899
99	3196	5148	245267
100	1641	3717	244899
101	3302	5561	243991
102	3051	5227	242390
103	1158	4333	241039
104	2609	5077	240251
105	2210	4135	238886
106	2655	5133	238207
107	2511	5210	232814
108	3012	5432	231702
109	3162	5213	229952
110	2387	4361	229368
111	1850	5292	227917
112	4466	6021	224423
113	3542	4708	223028
114	1902	5145	222675
115	2372	5104	222442
116	2686	5147	221902
117	375	2847	220744
118	3021	5616	219012
119	1733	4285	218385
120	1942	4484	216552
121	3377	4565	214511
122	3066	5387	213209
123	3187	4541	211498
124	1859	5091	211484
125	1832	4811	211033
126	2224	4145	209549
127	3724	4048	207753
128	2746	5137	205494
129	2785	4799	202977
130	2547	5144	201287
131	2445	5042	200997
132	1417	4335	200663

(continua)

(continuação)

Daskin95Cli150x10			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
133	2534	6038	200550
134	1932	3827	199781
135	4376	6152	199196
136	1612	4032	198391
137	1792	5250	195932
138	3103	5099	195073
139	2948	5132	194646
140	2507	5157	193428
141	3210	5409	193319
142	3022	4555	192138
143	1835	4282	191939
144	2826	5000	190591
145	2012	4950	189687
146	4364	3794	189005
147	1790	5715	188302
148	1153	5190	187621
149	1840	5500	187241
150	1387	3668	186032

Daskin95CA150x10					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	1990	5152	30000000	5000	0
2	3338	5252	30000000	5000	0
3	1629	4042	30000000	5000	0
4	3250	4189	30000000	5000	0
5	2234	4886	30000000	5000	0
6	3000	5355	30000000	5000	0
7	3637	4822	30000000	5000	0
8	2217	4140	30000000	5000	0
9	2919	4548	30000000	5000	0
10	3807	5933	30000000	5000	0

Or76Cli117x14			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
1	1272	1020	17.663
2	1280	900	21.453
3	1182	970	35.993
4	590	1280	4.31
5	1217	1165	0
6	1235	1080	5.053
7	1080	1126	2.283
8	1182	1200	2.497
9	1110	960	0.373
10	1145	1313	2.92
11	1187	768	8.467
12	359	967	3.98
13	1140	895	0.42
14	1300	792	6.11
15	980	1160	0.95
16	1225	1090	5.847
17	1075	595	8.543
18	1180	962	52.567
19	1230	1104	8
20	1129	1400	0.31
21	814	782	3.437
22	1176	955	0.007
23	363	700	2.497
24	1182	1235	8.133
25	1205	337	5.73
26	1220	755	2.993
27	1159	1432	8.247
28	1220	1175	2.257
29	1118	1010	1.143
30	1092	983	2.51
31	880	1012	1.92
32	1231	1085	3.193
33	1248	1027	1.477
34	755	802	0
35	808	1402	2.84
36	1145	715	9.333
37	1325	770	3.33
38	1217	1118	8.677
39	1186	957	0.01
40	1329	696	3.57
41	1336	743	0.057
42	1140	610	10.823
43	1024	965	2.04
44	1243	915	1.703

(continua)

(continuação)

Or76Cli117x14			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
45	1217	1190	6.417
46	900	942	14.437
47	880	1358	14.277
48	978	872	8.467
49	1156	1164	1.173
50	1187	986	0.57
51	732	1038	7.623
52	1269	901	12.44
53	1146	937	16.667
54	1140	885	0.017
55	1085	1230	0.767
56	1176	1288	2.897
57	795	1044	0.643
58	1015	1137	7.083
59	630	1432	6.2
60	1130	1032	3.023
61	1070	325	3.5
62	960	978	5.33
63	935	458	2.32
64	1280	800	3.147
65	1173	1181	4.98
66	936	1238	5.867
67	1231	1076	1.897
68	1260	538	4.427
69	1086	1200	0.003
70	976	1080	0.3
71	1062	1405	3.347
72	1361	620	4.66
73	1359	673	1.957
74	1187	275	1.44
75	1045	1035	7.14
76	1137	919	2.793
77	1245	740	3.3
78	1156	1050	4.977
79	1160	1326	11.897
80	1170	466	9.893
81	1205	959	2.413
82	1235	93	7.433
83	1236	1112	3.947
84	1160	1035	5.723
85	761	766	0.147
86	1130	1205	3.333
87	1148	1178	1
88	1217	784	2.147

(continua)

(continuação)

Or76Cli117x14			
Cliente	Abcissa	Ordenada	Encomenda
89	969	228	0.633
90	1300	770	23.163
91	1182	956	21.83
92	895	920	26.493
93	1265	1020	10
94	1171	960	7.843
95	1087	735	0.603
96	1118	1036	2.27
97	883	1058	3.293
98	1003	1004	5.237
99	1296	758	2
100	90	993	1.66
101	692	1930	3.143
102	67	661	5.877
103	82	1073	1.793
104	125	1369	0.19
105	955	1718	3.15
106	853	2110	0
107	844	1870	1.283
108	888	2015	3.41
109	136	1448	8.23
110	81	1361	1.76
111	72	699	2.37
112	853	2128	3.88
113	870	1998	0.71
114	907	2170	5.213
115	887	2330	0.573
116	537	165	5.7
117	400	136	7.537

Or76CA117x14					
CA	Abcissa	Ordenada	Capacidade	Cust. Fixo	Cust. Var.
1	1180	962	300	274.3	0
2	1182	970	300	440.1	0
3	895	920	300	535.1	0
4	1300	770	300	568.4	0
5	1182	956	300	581.7	0
6	1280	900	300	585.5	0
7	1272	1020	300	623.4	0
8	1146	937	300	633.4	0
9	900	942	300	655.6	0
10	880	1358	300	657.7	0
11	1269	901	300	675.6	0
12	1160	1326	300	681	0
13	1140	610	300	691.8	0
14	1265	1020	300	700	0

Apêndice B

Melhor Solução Conhecida

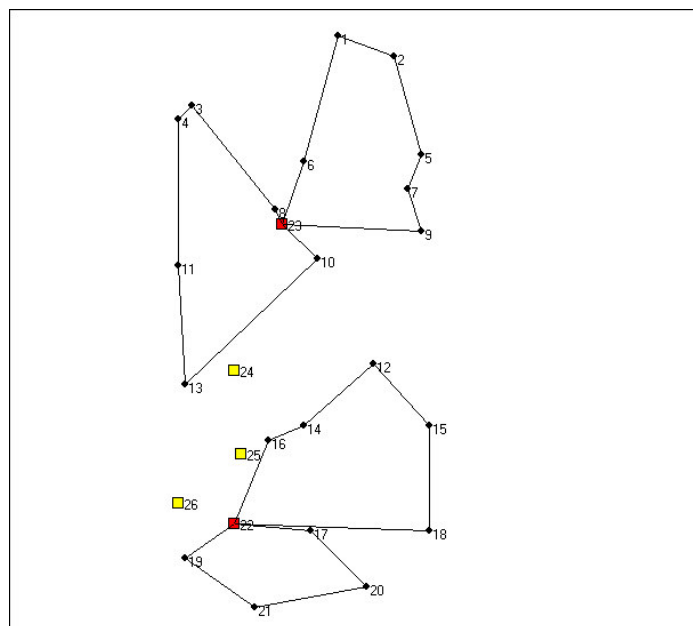
Apresentar a melhor solução conhecida para cada uma das 19 instâncias que serviram de base aos testes computacionais é o objectivo deste apêndice. Em cada caso é identificada a instância e o tipo de solução em presença, óptima ou aproximada. Além da visualização gráfica das soluções são também indicadas as rotas, a sua capacidade e custo, assim como o custo total da solução.

No caso de a solução ser aproximada é identificada a combinação da versão do algoritmo 2 (V1, V2, V3, V4) com a medida de proximidade (LS, LC, MG, CT, WA, SA) que a permitiu obter.

Na instância 14, a melhor solução foi obtida com base no algoritmo sequencial clássico (p. 218). É com a combinação (V2,LC) que o algoritmo 2 obtém a segunda melhor solução.

Instância 1 (Gaskell67-21x5)

Solução óptima



Rota[1]={23,6,1,2,5,7,9}

Rota[2]={23,8,3,4,11,13,10}

Rota[3]={22,16,14,12,15,18}

Rota[4]={22,17,20,21,19}

CapRot[1]= 5600.0

CapRot[2]= 5400.0

CapRot[3]= 5500.0

CapRot[4]= 6000.0

CustRot[1]= 83.0

CustRot[2]= 95.5

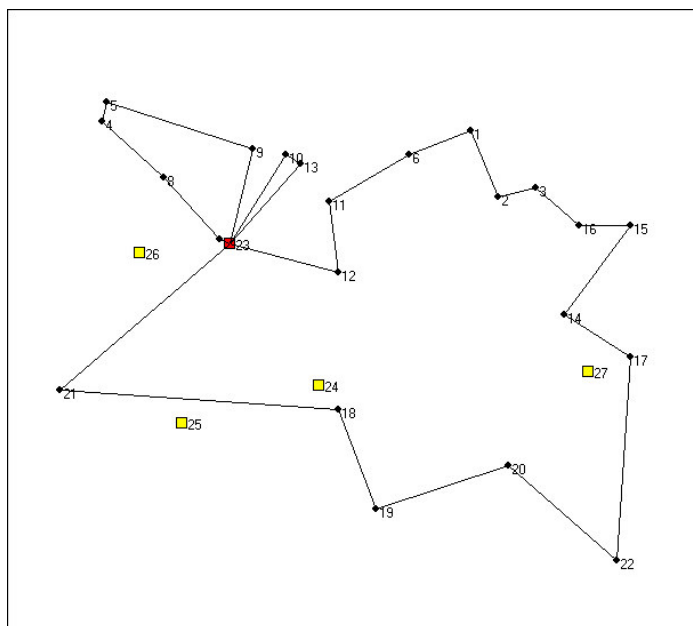
CustRot[3]= 86.9

CustRot[4]= 59.4

Custo PLDC= 424.9

Instância 2 (Gaskell67-22x5)

Solução óptima



Rota[1]={23,7,8,4,5,9}

Rota[2]={23,10,13}

Rota[3]={23,12,11,6,1,2,3,16,15,14,17,22,20,19,18,21}

CapRot[1]= 2400.0

CapRot[2]= 4350.0

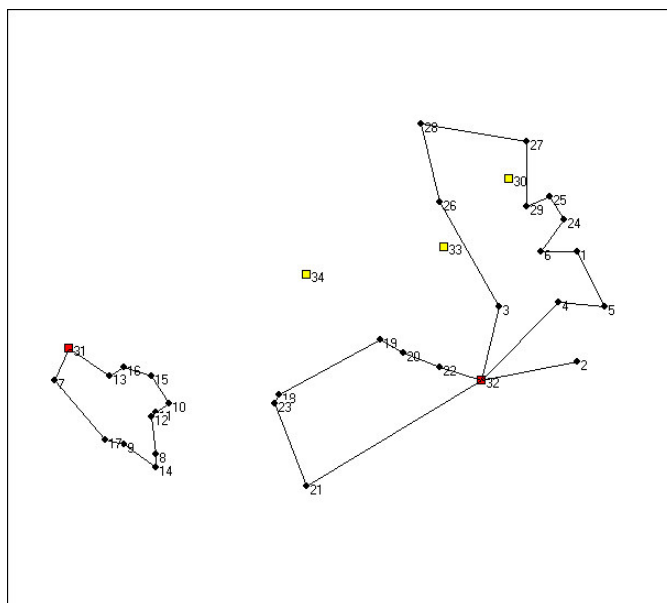
CapRot[3]= 3439.0

CustRot[1]= 94.9

CustRot[2]= 48.7

CustRot[3]= 391.4

Custo PLDC= 585.1

Instância 3 (Gaskell67-29x5)**Solução óptima**

Rota[1]={32,2}

Rota[2]={32,3,26,28,27,29,25,24,6,1,5,4}

Rota[3]={31,7,17,9,14,8,12,11,10,15,16,13}

Rota[4]={32,21,23,18,19,20,22}

CapRot[1]= 3100.0

CapRot[2]= 3725.0

CapRot[3]= 3175.0

CapRot[4]= 2750.0

CustRot[1]= 42.8

CustRot[2]= 173.0

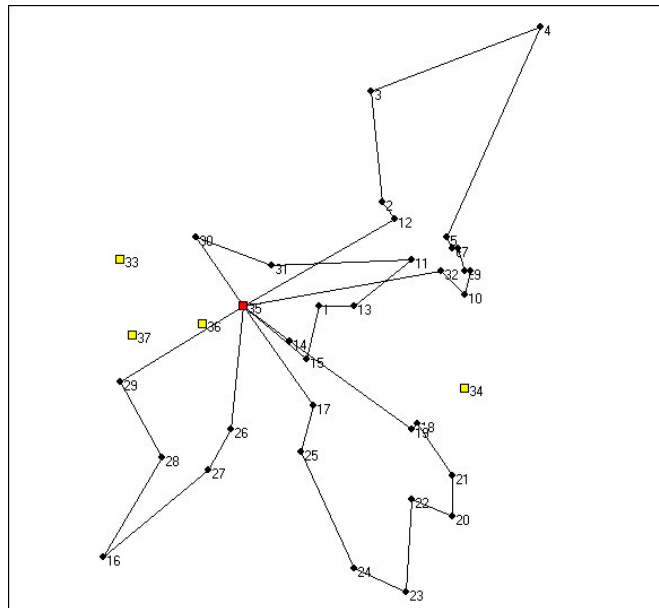
CustRot[3]= 81.4

CustRot[4]= 114.9

Custo PLDC= 512.1

Instância 4 (Gaskell67-32x5)

Solução aproximada (V4, LC)



Rota[1]={35,12,2,3,4,5,6,7,8,9,10,32}

Rota[2]={35,15,1,13,11,31,30}

Rota[3]={35,17,25,24,23,22,20,21,18,19,14}

Rota[4]={35,29,28,16,27,26}

CapRot[1]= 7620.0

CapRot[2]= 7100.0

CapRot[3]= 7850.0

CapRot[4]= 6800.0

CustRot[1]= 175.8

CustRot[2]= 94.6

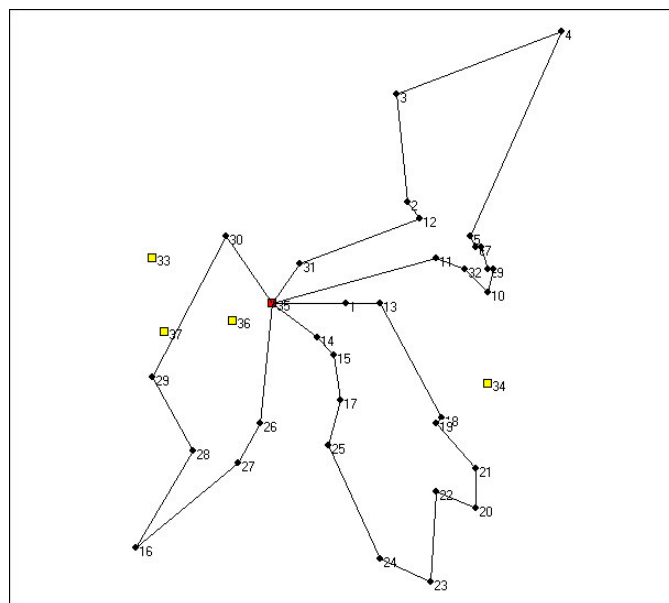
CustRot[3]= 139.5

CustRot[4]= 111.8

Custo PLDC= 571.7

Instância 5 (Gaskell67-32x5)

Solução óptima



Rota[1]={35,1,13,18,19,21,20,22,23,24,25,17,15,14}

Rota[2]={35,11,32,10,9,8,7,6,5,4,3,2,12,31}

Rota[3]={35,26,27,16,28,29,30}

CapRot[1]= 9250.0

CapRot[2]= 10820.0

CapRot[3]= 9300.0

CustRot[1]= 146.8

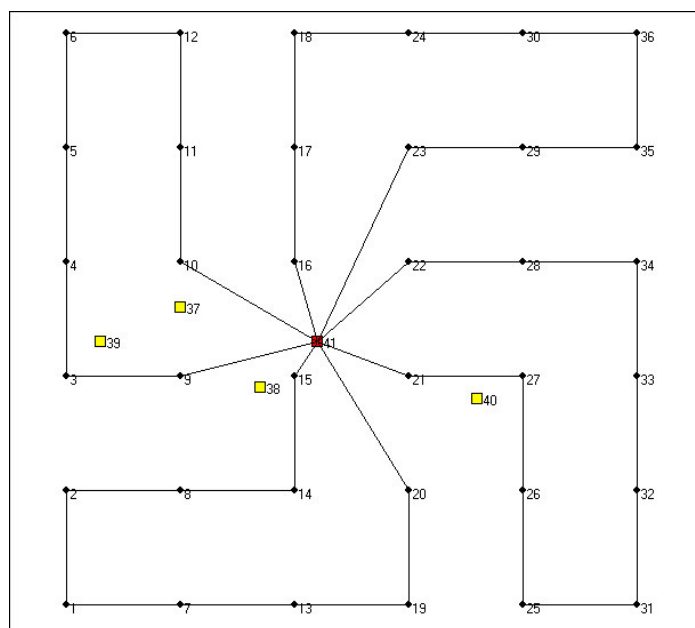
CustRot[2]= 177.8

CustRot[3]= 129.7

Custo PLDC= 504.3

Instância 6 (Gaskell67-36x5)

Solução óptima



Rota[1]={41,9,3,4,5,6,12,11,10}

Rota[2]={41,15,14,8,2,1,7,13,19,20}

Rota[3]={41,16,17,18,24,30,36,35,29,23}

Rota[4]={41,21,27,26,25,31,32,33,34,28,22}

CapRot[1]= 200.0

CapRot[2]= 225.0

CapRot[3]= 225.0

CapRot[4]= 250.0

CustRot[1]= 96.3

CustRot[2]= 98.9

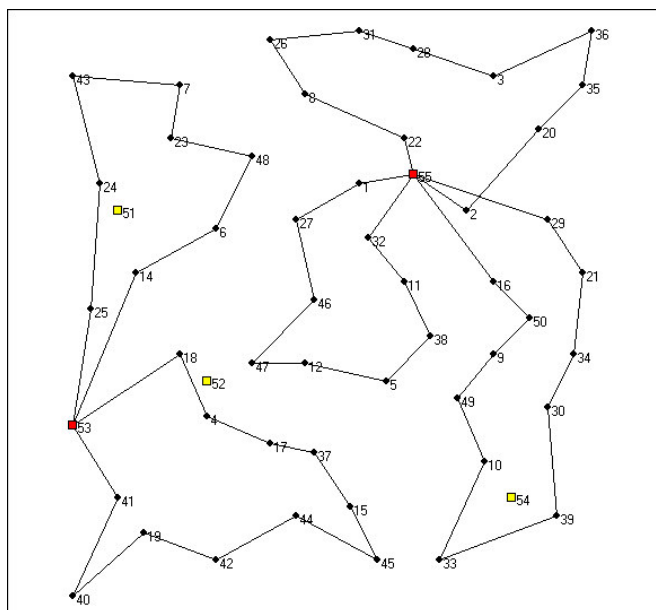
CustRot[3]= 106.1

CustRot[4]= 109.2

Custo PLDC= 460.4

Instância 7 (Christofides69-50x5)

Solução aproximada (V2, LC)



Rota[1]={551,27,46,47,12,5,38,11,32}

Rota[2]={55,22,8,26,31,28,3,36,35,20,2}

Rota[3]={53,41,40,19,42,44,45,15,37,17,4,18}

Rota[4]={53,13,25,24,43,7,23,48,6,14}

Rota[5]={55,29,21,34,30,39,33,10,49,9,50,16}

CapRot[1]= 148.0

CapRot[2]= 160.0

CapRot[3]= 154.0

CapRot[4]= 160.0

CapRot[5]= 155.0

CustRot[1]= 77.3

CustRot[2]= 93.8

CustRot[3]= 110.0

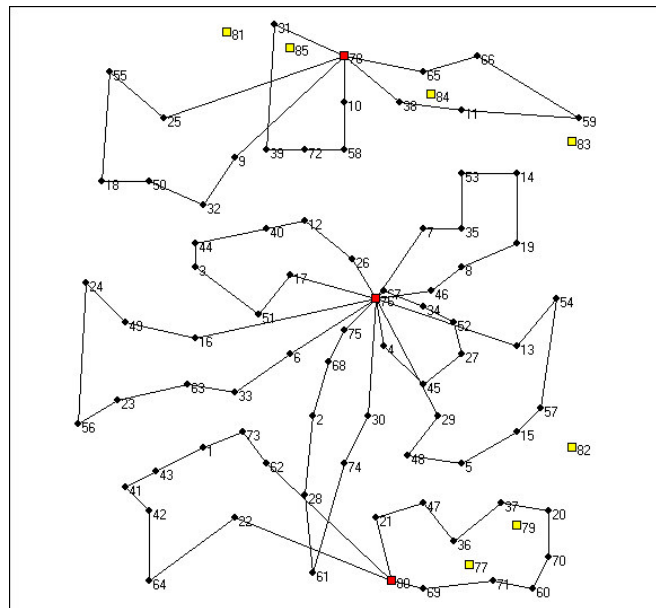
CustRot[4]= 104.5

CustRot[5]= 117.2

Custo PLDC= 582.7

Instância 8 (Christofides69-75x10)

Solução aproximada (V2, WA)



Rota[1]={76,30,74,61,28,2,68,75}

Rota[2]={76,17,51,3,44,40,12,26}

Rota[3]={76,4,45,27,52,34,67}

Rota[4]={76,13,54,57,15,5,48,29}

Rota[5]={76,7,35,53,14,19,8,46}

Rota[6]={78,10,58,72,39,31}

Rota[7]={78,65,66,59,11,38}

Rota[8]={78,25,55,18,50,32,9}

Rota[9]={80,69,71,60,70,20,37,36,47,21}

Rota[10]={76,16,49,24,56,23,63,33,6}

Rota[11]={80,62,73,1,43,41,42,64,22}

CapRot[1]= 132.0

CapRot[2]= 127.0

CapRot[3]= 136.0

CapRot[4]= 104.0

CapRot[5]= 136.0

CapRot[6]= 89.0

CapRot[7]= 131.0

CapRot[8]= 113.0

CapRot[9]= 130.0

CapRot[10]= 140.0

CapRot[11]= 126.0

CustRot[1]= 73.8

CustRot[2]= 58.8

CustRot[3]= 35.0

CustRot[4]= 83.7

CustRot[5]= 58.5

CustRot[6]= 47.9

CustRot[7]= 65.1

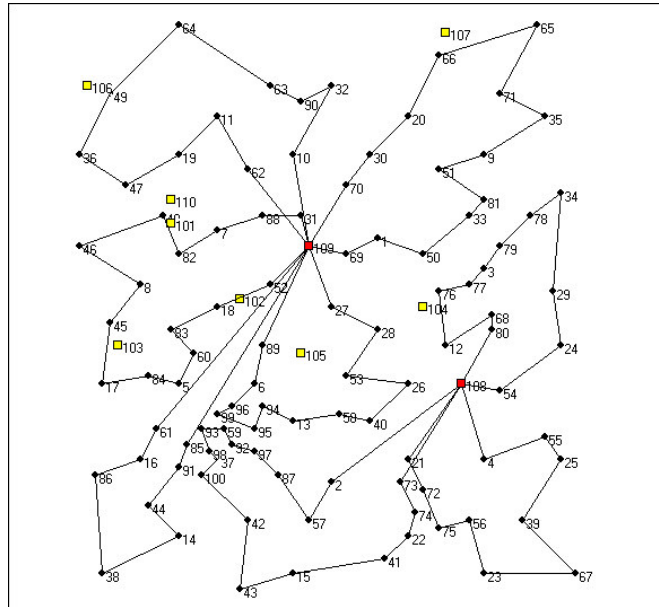
CustRot[8]= 87.5

CustRot[9]= 63.6

CustRot[10]= 100.6

CustRot[11]= 91.9

Custo PLDC= 886.3

Instância 9 (Christofides69-100x10)**Solução aproximada (V2, CT)**

Rota[1]={109,27,28,53,26,40,58,13,94,95,99,96,6,89}

Rota[2]={108,73,74,22,41,15,43,42,100,37,98,93,59,92,97,87,57,2}

Rota[3]={108,80,68,12,76,77,3,79,78,34,29,24,54}

Rota[4]={108,21,72,75,56,23,67,39,25,55,4}

Rota[5]={109,31,88,7,82,48,46,8,45,17,84,5,60,83,18,52}

Rota[6]={109,10,32,90,63,64,49,36,47,19,11,62}

Rota[7]={109,85,91,44,14,38,86,16,61}

Rota[8]={109,70,30,20,66,65,71,35,9,51,81,33,50,1,69}

CapRot[1]= 198.0

CapRot[2]= 199.0

CapRot[3]= 171.0

CapRot[4]= 172.0

CapRot[5]= 189.0

CapRot[6]= 171.0

CapRot[7]= 163.0

CapRot[8]= 195.0

CustRot[1]= 86.7

CustRot[2]= 118.6

CustRot[3]= 80.8

CustRot[4]= 87.4

CustRot[5]= 102.6

CustRot[6]= 110.7

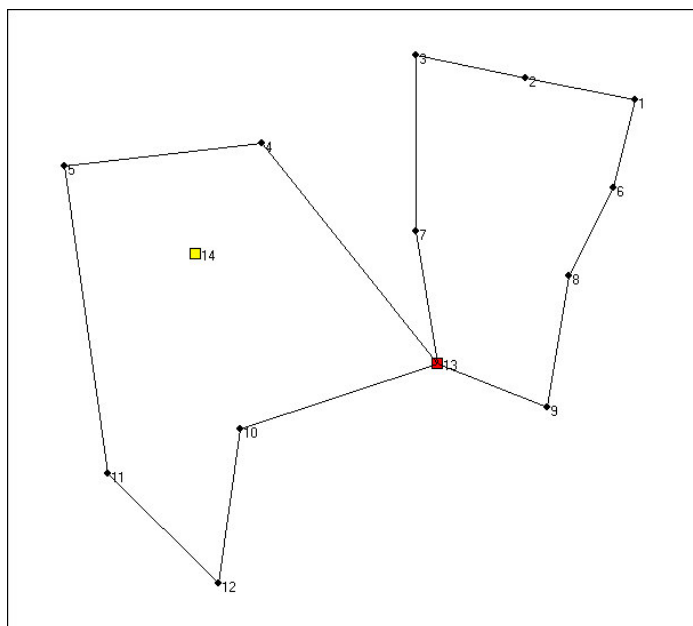
CustRot[7]= 112.0

CustRot[8]= 110.6

Custo PLDC= 889.4

Instância 10 (Perl83-12x2)

Solução óptima



Rota[1]={13,4,5,11,12,10}

Rota[2]={13,7,3,2,1,6,8,9}

CapRot[1]= 100.0

CapRot[2]= 140.0

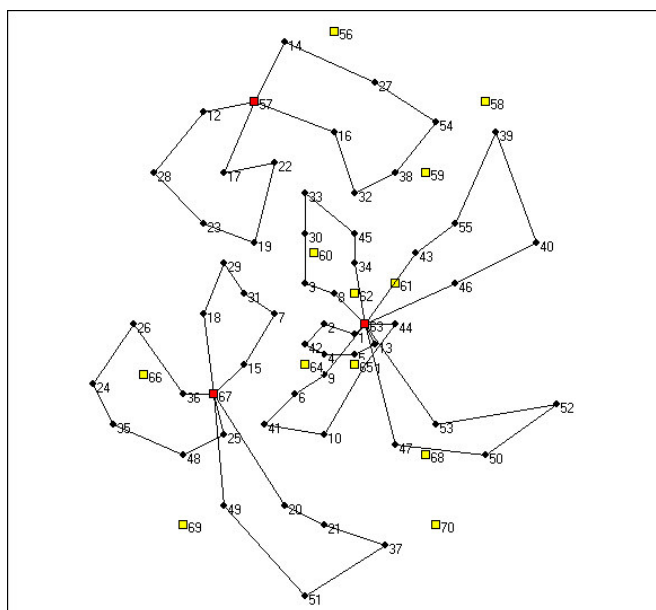
CustRot[1]= 59.6

CustRot[2]= 44.3

Custo PLDC= 204.0

Instância 11 (Perl83-55x15)

Solução aproximada (V2, WA)



Rota[1]={63,13,5,4,42,2,1}

Rota[2]={63,34,45,33,30,3,8}

Rota[3]={67,15,7,31,29,18}

Rota[4]={57,12,28,23,19,22,17}

Rota[5]={57,16,32,38,54,27,14}

Rota[6]={67,49,51,37,21,20}

Rota[7]={67,36,26,24,35,48,25}

Rota[8]={63,44,11,10,41,6,9}

Rota[9]={63,43,55,39,40,46}

Rota[10]={63,47,50,52,53}

CapRot[1]= 120.0

CapRot[2]= 120.0

CapRot[3]= 100.0

CapRot[4]= 120.0

CapRot[5]= 120.0

CapRot[6]= 100.0

CapRot[7]= 120.0

CapRot[8]= 120.0

CapRot[9]= 100.0

CapRot[10]= 80.0

CustRot[1]= 17.1

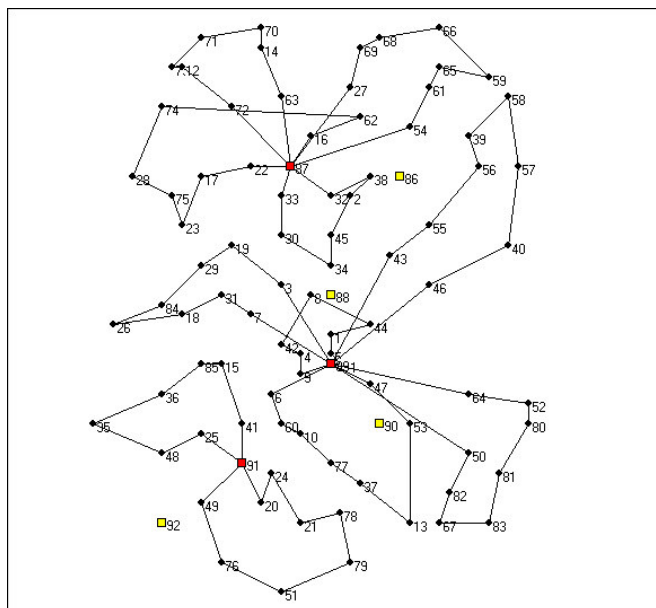
CustRot[2]= 31.9

CustRot[3]= 30.7

CustRot[4]= 46.3
CustRot[5]= 49.5
CustRot[6]= 56.4
CustRot[7]= 39.5
CustRot[8]= 36.4
CustRot[9]= 53.9
CustRot[10]= 54.4
Custo PLDC= 1136.2

Instância 12 (Perl83-85x7)

Solução aproximada (V2, WA)



Rota[1]={89,9,4,42,8,44,1,5,11}

Rota[2]={87,33,30,34,45,2,38,32}

Rota[3]={91,41,15,85,36,35,48,25}

Rota[4]={89,3,19,29,84,26,18,31,7}

Rota[5]={87,63,14,70,71,73,12,72}

Rota[6]={89,64,52,80,81,83,67,82,50}

Rota[7]={87,22,17,23,75,28,74,62,16}

Rota[8]={91,20,24,21,78,79,51,76,49}

Rota[9]={87,54,61,65,59,66,68,69,27}

Rota[10]={89,6,60,10,77,37,13,53,47}

Rota[11]={89,46,40,57,58,39,56,55,43}

CapRot[1]= 160.0

CapRot[2]= 140.0

CapRot[3]= 140.0

CapRot[4]= 160.0

CapRot[5]= 140.0

CapRot[6]= 160.0

CapRot[7]= 160.0

CapRot[8]= 160.0

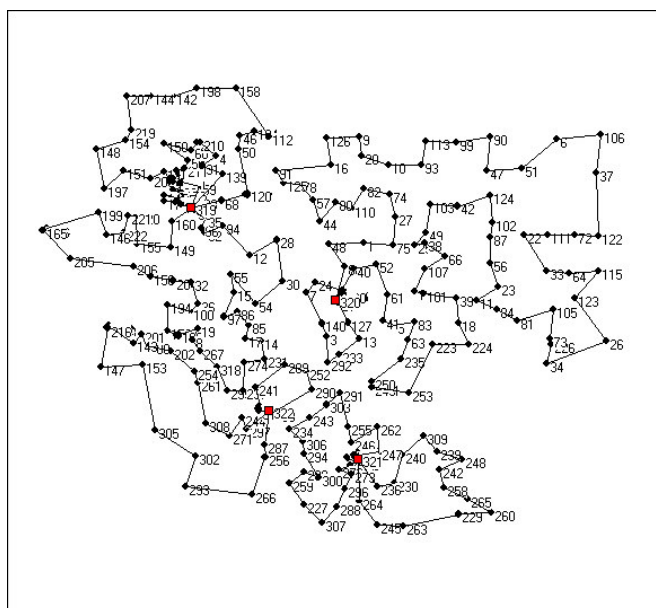
CapRot[9]= 160.0

CapRot[10]= 160.0

CapRot[11]= 160.0

CustRot[1]= 28.5

CustRot[2]= 32.8
CustRot[3]= 42.0
CustRot[4]= 55.1
CustRot[5]= 40.7
CustRot[6]= 62.6
CustRot[7]= 58.8
CustRot[8]= 49.0
CustRot[9]= 54.0
CustRot[10]= 46.5
CustRot[11]= 71.0
Custo PLDC= 1656.9

Instância 13 (Perl83-318x4)**Solução aproximada (V1, LC)**

Rota[1]={320,89,88,48,1,75,27,74,82,109,110,80,44,57,76,77,78,125,91,16,126,9,20,10,93,113,99,90,47,51,6,106,37,122,72,111,22,33,64,115,123,26,34,226,73,105,81,84,11,23,56,87,102,124,45,43,42,103,49,25,38,65,66,107,114,101,39,18,225,224,223,253,251,249,250,235,62,63,83,5,41,61,52,40}

Rota[2]={320,21,128,127,13,233,292,3,2,141,140,7,24,136,133,132,137,134,138,131,135,129,130,79}

Rota[3]={319,67,68,116,119,121,118,117,120,50,46,104,112,158,198,142,144,207,219,154,148,197,151,208,157,161,162,187,196,179,159,211,58,150,60,209,210,4,69,70,71,31,139}

Rota[4]={319,160,149,155,220,221,222,146,199,164,166,163,165,205,206,156,203,204,32,36,100,194,152,167,169,168,19,8,267,318,295,238,237,274,231,14,17,85,86,98,97,15,55,53,54,30,29,28,12,94,92,96,35}

Rota[5]={319,95,108,59,175,174,182,184,186,191,193,173,181,172,176,192,170,171,189,188,190,185,145,177,183,180,178,195}

Rota[6]={322,297,244,270,271,308,261,254,202,200,201,143,218,217,212,213,215,214,216,147,153,305,302,293,266,257,256,287}

Rota[7]={321,264,245,263,228,229,260,265,258,242,248,239,309,240,230,236}

Rota[8]={321,284,280,281,268,269,272,273,296,288,307,227,259,299,301,300,294,306,234,243,304,303,291,255,246,262,247,232,286,278,276,282,285,279,283,277,275}

Rota[9]={322,298,290,252,289,241,316,313,314,311,315,317,312,310}

CapRot[1]= 19082.3

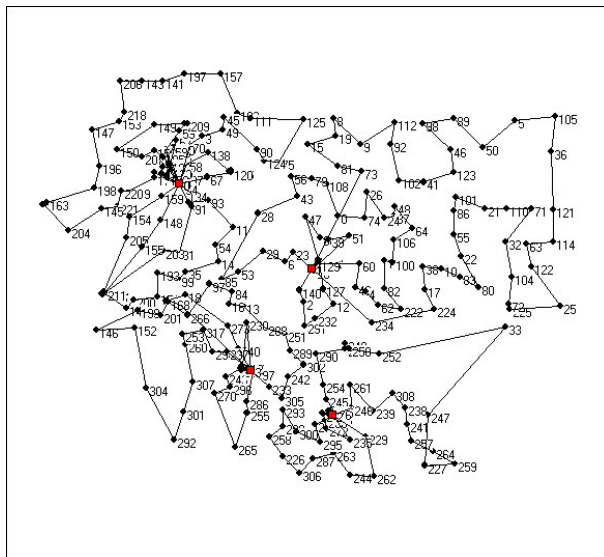
CapRot[2]= 21087.5

CapRot[3]= 23073.0

CapRot[4]= 24429.0
CapRot[5]= 24748.0
CapRot[6]= 19851.5
CapRot[7]= 8186.8
CapRot[8]= 24780.3
CapRot[9]= 22857.0
CustRot[1]=204457.1
CustRot[2]= 21615.1
CustRot[3]= 71149.2
CustRot[4]= 99555.5
CustRot[5]= 12986.9
CustRot[6]= 62304.0
CustRot[7]= 42925.4
CustRot[8]= 43903.7
CustRot[9]= 15893.2
Custo PLDC= 580680.2

Instância 14 (Perl83-318x4)

Solução aproximada (Método Sequencial)



Rota[1]={320,21,131,61,41,5,62,63,223,83,114,101,107,66,65,49,38,25,27,75,1,110,109,80,57,44,28,29,86,53,

Rota[2]={320,140,141,2,3,292,233,13,127,128,129}

Rota[3]={320,74,82,16,20,9,10,113,93,103,43,45,42,124,47,99,90,51,6,106,37,122,115,64,123,26,226,73,105,3,

Rota[4]={320,132,133,136,48,88,89,40,52,138,135}

Rota[5]={320,79,134,137}

Rota[6]={320,130}

Rota[7]={319,183,145,177,220,221,222,146,205,165,163,166,164,199,197,148,154,219,207,144,142,198,158,1

Rota[8]={319,96,94,12,55,15,36,100,194,152,201,143,218,217,216,214,215,213,206,155,160}

Rota[9]={319,35,92,32,203,204,212,156,149}

Rota[10]={319,174,175,58,211,179,187,161,162,173}

Rota[11]={319,108,59,139,116,119,120,117,118,121,67,68}

Rota[12]={319,182,159,60,209,210,150,151,208,157,196,186,172,192}

Rota[13]={319,95}

Rota[14]={319,195,178,170,189,188,190,185,193,184,191,176}

Rota[15]={319,181,171,180}

Rota[16]={322,8,168,167,19,274,241}

Rota[17]={322,234,306,243,304,303,290,252,289,14,17,85,97,98,267,169,202,200,147,153,305,293,302,308,2

Rota[18]={322,231,316}

Rota[19]={322,317,311,315,244,297,270,271,266,257,256,287,298}

Rota[20]={322,310,314}

Rota[21]={322,312}

Rota[22]={322,313}

Rota[23]={321,286,278,246,255,291,249,250,251,253,34,248,229,228,260,265,258,242,239,309,240,262,247}

Rota[24]={321,230,263,245,264,288,307,227,259,299,294,300,301,296,272,280}

Rota[25]={321,232,276}

Rota[26]={321,236,273,269,268,281,284}

Rota[27]={321,275,283,285,282,279,277}

CapRot[1]= 5884.3

CapRot[2]= 7582.0

CapRot[3]= 7999.5

CapRot[4]= 6547.5

CapRot[5]= 6960.5

CapRot[6]= 4783.0

CapRot[7]= 7955.8

CapRot[8]= 7550.5

CapRot[9]= 7845.8

CapRot[10]= 7954.8

CapRot[11]= 7801.3

CapRot[12]= 7654.3

CapRot[13]= 6499.5

CapRot[14]= 6578.0

CapRot[15]= 7507.5

CapRot[16]= 7994.8

CapRot[17]= 7969.0

CapRot[18]= 6886.5

CapRot[19]= 5862.0

CapRot[20]= 7463.5

CapRot[21]= 5760.8

CapRot[22]= 5131.5

CapRot[23]= 5224.3

CapRot[24]= 7894.5

CapRot[25]= 6627.8

CapRot[26]= 6778.8

CapRot[27]= 7398.0

CustRot[1]= 72888.0

CustRot[2]= 16153.0

CustRot[3]=151616.0

CustRot[4]= 17083.2

CustRot[5]= 2137.7

CustRot[6]= 1665.0

CustRot[7]= 83431.7

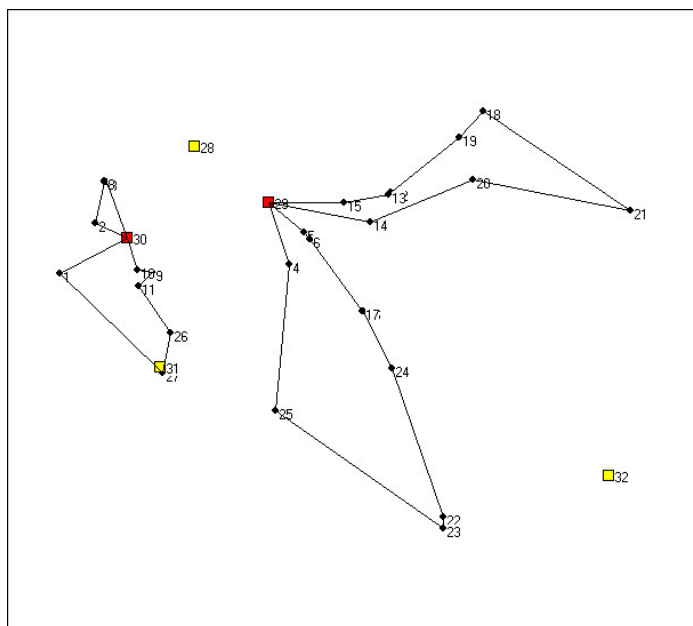
CustRot[8]= 43908.3

CustRot[9]= 31365.8

CustRot[10]= 11189.7
CustRot[11]= 14236.0
CustRot[12]= 24354.3
CustRot[13]= 970.4
CustRot[14]= 6372.9
CustRot[15]= 3793.7
CustRot[16]= 24897.8
CustRot[17]= 77061.6
CustRot[18]= 10593.8
CustRot[19]= 20574.3
CustRot[20]= 2224.3
CustRot[21]= 2020.9
CustRot[22]= 2028.6
CustRot[23]= 70326.9
CustRot[24]= 36376.2
CustRot[25]= 1140.4
CustRot[26]= 8820.6
CustRot[27]= 1260.8
Custo PLDC= 744381.8

Instância 15 (Min92-27x5)

Solução óptima



Rota[1]={30,1,27,26,11,9,10}

Rota[2]={30,2,7,8,3}

Rota[3]={29,4,25,23,22,24,16,17,6,5}

Rota[4]={29,14,20,21,18,19,12,13,15}

CapRot[1]= 2300.0

CapRot[2]= 1570.0

CapRot[3]= 2260.0

CapRot[4]= 2280.0

CustRot[1]= 456.1

CustRot[2]= 167.0

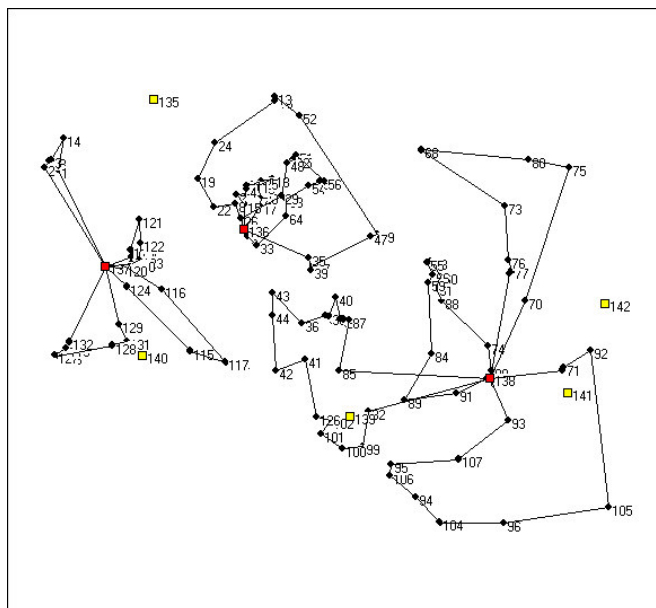
CustRot[3]= 944.6

CustRot[4]= 950.3

Custo PLDC= 3062.0

Instância 16 (Min92-134x8)

Solução aproximada (V1, SA)



Rota[1]={137,2,28,3,14,1}

Rota[2]={136,17,20,12,27,10,5,18,25,11,9,4,6,21,23,15}

Rota[3]={136,8,22,19,24,7,16,13,52,49,47,57,39,35}

Rota[4]={136,37,32,33,64,63,54,53,56,51,65,62,48,46,29,26}

Rota[5]={138,82,99,100,101,102,126,41,42,44,43,36,34,38,40,30,45,31,87,85}

Rota[6]={138,81,90,74,88,50,61,60,58,55,66,59,84,89,91,86}

Rota[7]={138,78,72,77,76,73,67,68,80,75,70}

Rota[8]={138,79,69,71,92,97,105,96,98,104,94,106,95,103,107,83,93}

Rota[9]={137,129,131,134,128,108,127,119,109,132}

Rota[10]={137,112,130,113,121,122,123,110}

Rota[11]={137,125,124,133,115,114,117,116,111,118,120}

CapRot[1]= 341.0

CapRot[2]= 740.0

CapRot[3]= 824.0

CapRot[4]= 823.0

CapRot[5]= 846.0

CapRot[6]= 552.0

CapRot[7]= 729.0

CapRot[8]= 718.0

CapRot[9]= 788.0

CapRot[10]= 701.0

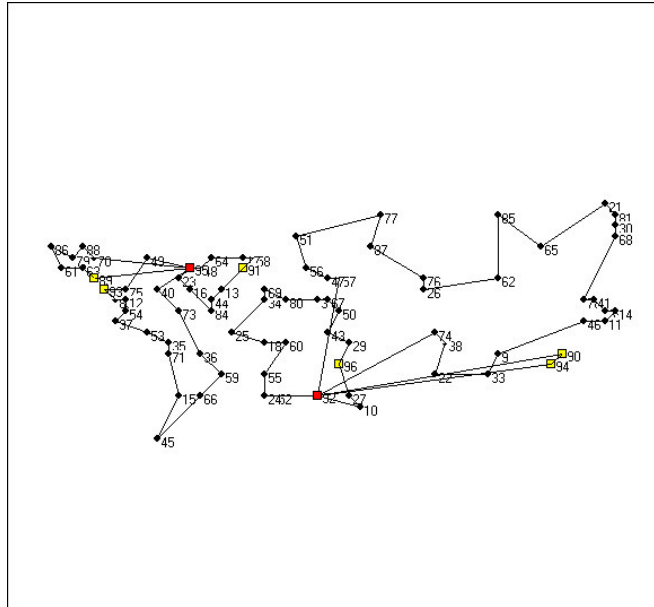
CapRot[11]= 849.0

CustRot[1]= 358.8

CustRot[2]= 183.3
CustRot[3]= 652.6
CustRot[4]= 327.8
CustRot[5]= 898.7
CustRot[6]= 471.7
CustRot[7]= 801.8
CustRot[8]= 852.6
CustRot[9]= 314.2
CustRot[10]= 175.5
CustRot[11]= 397.0
Custo PLDC= 6238.0

Instância 17 (Daskin95-88x8)

Solução aproximada (V3, LS)



Rota[1]={92,6,32,2}

Rota[2]={95,70,88,79,86,20,61,63,1}

Rota[3]={92,4,52,24,55,60,18,25,34,69,80,31,67,50,43,29,28,8,27,10}

Rota[4]={92,57,47,56,42,51,77,87,76,26,62,85,65,21,81,30,68,78,41,39,14,11,46,9,33,22,38,74}

Rota[5]={95,49,75,5,72,83,82,19,12,54,37,53,35,71,15,45,66,59,36,73,40}

Rota[6]={95,7,23,16,84,44,13,3,58,17,64,48}

CapRot[1]=5025380.0

CapRot[2]=8363974.0

CapRot[3]=8882670.0

CapRot[4]=8333988.0

CapRot[5]=6883384.0

CapRot[6]=7351175.0

CustRot[1]= 47.0

CustRot[2]= 28.8

CustRot[3]= 44.1

CustRot[4]= 110.9

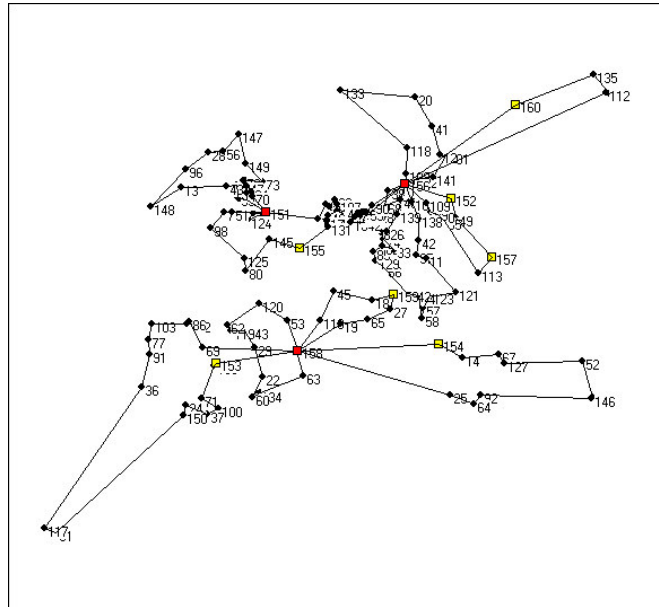
CustRot[5]= 51.8

CustRot[6]= 18.7

Custo PLDC= 384.9

Instância 18 (Daskin95-150x10)

Solução aproximada (V1,MG),(V1,CT)



Rota[1]={151,1,114,124}

Rota[2]={156,10,135,34,112}

Rota[3]={158,3,136,71,100,37,24,150,61,117,36,91,77,103,132,86,69}

Rota[4]={158,4,14,67,127,52,21,146,92,64,25}

Rota[5]={151,115,44,31,23,107,130,140,46,17,131,5,145,80,125,98,79,51}

Rota[6]={156,6,38,68,40,102,122,141,101,12,41,20,133,118,108}

Rota[7]={156,2,49,7,113,95,50,99,109}

Rota[8]={158,8,105,63,78,134,60,22,29,143,119,62,120,53,126}

Rota[9]={158,110,45,18,9,27,65,19}

Rota[10]={156,138,42,97,11,121,83,123,57,58,94,142,66,129,85,82,33,74,144,89,26,139}

Rota[11]={151,75,15,137,93,87,54,43,13,148,96,28,56,147,149,73,48,76,47,111,84,70}

Rota[12]={156,32,128,59,16,72,104,88,106,35,39,116,30,81,55,90}

CapRot[1]=7827968.0

CapRot[2]=2237338.0

CapRot[3]=7819862.0

CapRot[4]=6817582.0

CapRot[5]=7938115.0

CapRot[6]=6986602.0

CapRot[7]=6610770.0

CapRot[8]=5879572.0

CapRot[9]=4651978.0

CapRot[10]=7259805.0

CapRot[11]=7924028.0

CapRot[12]=6014765.0

CustRot[1]= 301.8

CustRot[2]= 3420.1

CustRot[3]= 5609.1

CustRot[4]= 4673.7

CustRot[5]= 2552.7

CustRot[6]= 2884.6

CustRot[7]= 1898.3

CustRot[8]= 2045.2

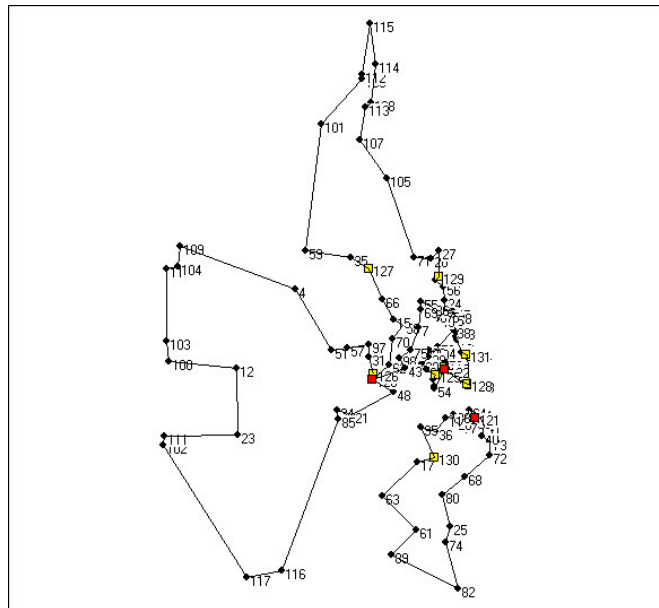
CustRot[9]= 1820.2

CustRot[10]= 2700.3

CustRot[11]= 2689.6

CustRot[12]= 1047.1

Custo PLDC= 46642.7

Instância 19 (Or76-117x14)**Solução aproximada (V4,MG)**

Rota[1]={121,90,14,64,77,26,88,11,36,95,42,17,63,61,89,82,74,25,80,68,72,73,40,41,37,99}

Rota[2]={118,44,52,2,1,93,33,67,6,32,16,19,83,38,78,84,60,96,29,30,9,53,76,13,54}

Rota[3]={120,92,48,21,34,85,116,117,102,111,23,12,100,103,110,104,109,4,51,57,97,31,46}

Rota[4]={120,62,70,58,15,66,47,35,59,101,106,112,115,114,108,113,107,105,71,20,27,79,10,56,24,8,45,28,5,65,49,87,86,55,69,7,75,98,43}

Rota[5]={118,18,3,50,81,39,91,22,94}

CapRot[1]= 129.6

CapRot[2]= 141.3

CapRot[3]= 112.4

CapRot[4]= 141.1

CapRot[5]= 121.2

CustRot[1]= 2203.8

CustRot[2]= 807.5

CustRot[3]= 4202.9

CustRot[4]= 3779.1

CustRot[5]= 103.1

Custo PLDC= 12474.2

Apêndice C

Revisão Bibliográfica - complementos

C.1 Bibliografia Por Ordem Cronológica

A fim de facilitar a pesquisa e investigação os artigos são objecto nesta secção de organização segundo a data de publicação.

- Maranzana, F. E., 1963, *On the Location of Supply Points to Minimize Transportation Costs* [147].
- Maranzana, F. E., 1964, *On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs* [148].
- Griffiths, D. O., 1968, *The Use of Regression Analysis in Depot Location Exercise* [97].
- Webb, M. H. J., 1968, *Cost Functions in the Location of Depots for Multiple-Delivery Journeys* [210].
- Lawrence, R. M., Pengilly, P., 1969, *The Number and Location of Depots Required for Handling Products for Distribution to Retail Stores in South-East England* [138].
- Christofides, N., Eilon, S., 1969, *Expected Distances in Distribution Problems* [46].
- Wren, A., Holliday, A., 1972, *Computer Scheduling of Vehicles From One or More Depots to a Number of Delivery Points* [213].
- Watson-Gandy, C. D. T., Dohrn, P. J., 1973, *Depot Location with Van Salesman – A Practical Approach* [209].

- Burness, R. C., White, J. A., 1976, *The traveling Salesman Location Problem* [35].
- Chan, A. W., Francis, R. L., 1976, *A Round-Trip Location Problem on a Tree Graph* [40].
- Chan, A. W., Hearn, D. W., 1977, *A Rectilinear Distances Round-Trip Location Problem* [41].
- Or, I., Pierskalla, W. P., 1979, *A Transportation Location-Allocation Model for Regional Blood Banking* [174].
- Harrison, H., 1979, *A Planning System for Facilities and Resources in Distribution Networks* [103].
- Jacobsen, S. K., Madsen, O. B. G., 1980, *A Comparative Study of Heuristics for a Two-Level Routing-Location Problem* [109].
- Madsen, O. B. J., 1981, *A Survey of Methods for Solving Combined Location-Routing Problems* [146].
- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1981, *A Large Scale Location-Allocation Problem in the Natural Rubber Industry* [168].
- Ghosh, J. K., Sinha, S. B., Acharya, D., 1981, *A Generalized Reduced Gradient Based Approach to Round-trip Location Problem* [89].
- Laporte, G., Nobert, Y., 1981, *An Exact Algorithm for Minimizing Routing and Operating Cost in Depot Location* [132].
- Drezner, Z., Wesolowsky G. O., 1982, *A Trajectory Approach to the Round-Trip Location Problem* [65].
- Drezner, Z., 1982, *Fast Algorithms for the Round Trip Location Problem* [61].
- Laporte, G., Norbert, Y., Pelletier, P., 1983, *Hamilton Location Problems* [135].
- Madsen, O. B. G., 1983, *Methods for Solving Combined Two Level Location-Routing Problems of Realistic Dimensions* [145].
- Perl, J., Daskin, M. S., 1984, *A Unified Warehouse Location-Routing Methodology* [177].
- Perl, J., Daskin, M. S., 1985, *A warehouse Location-Routing Problem* [178].
- Ichimori, T., Nishida, T., 1985, *Note on a Rectilinear Distance Round-Trip Location Problem* [107].

- Drezner, Z., 1985, *O(N log N) Algorithm for the Rectilinear Round-Trip Location Problem* [62].
- Drezner, Z., Steiner, G., Wesolowsky, G. O., 1985, *One-Facility Location with Rectilinear Tour Distances* [64].
- Kolen, A., 1985, *The Round-Trip p-Center and Covering Problem on a Tree* [119].
- Laporte, G., Nobert, Y., Arpin, D., 1986, *An Exact Algorithm for Solving a Capacitated Location-Routing Problem* [134].
- Labbé, M., Laporte, G., 1986, *Maximizing User Convenience and Postal Service Efficiency in Post Box Location* [123].
- Berman, O., Simchi-Levi, D., 1986, *Minisum Location of a Travelling Salesman* [23].
- Daskin, M. S., 1987, *Location, Dispatching, and Routing Models for Emergency Services with Stochastic Travel Times* [57].
- Balakrishnan, A., Ward, J. E., Wong, R. T., 1987, *Integrated Facility Location and Vehicle Routing Models: Recent Work and Future Prospects* [8].
- Laporte, G., Norbert, Y., Taillefer, S., 1988, *Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems* [136].
- Bookbinder, J., Reece, K. E., 1988, *Vehicle Routing Considerations in Distribution System Design* [30].
- Laporte, G., 1988, *Location-Routing Problems* [127].
- Berman, O., Simchi-Levi, D., 1988, *Finding the Optimal a Priori Tour and Location of a Traveling Salesman with Nonhomogeneous Customers* [24].
- Simchi-Levi, D., Berman, O., 1988, *A heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Location Problem* [196].
- Laporte, G., Dejax, P. J., 1989, *Dynamic Location-Routing Problems* [130].
- Laporte, G., Louveaux, F., Mercure, H., 1989, *Models and Exact Solutions for a Class of Stochastic Location-Routing Problems* [131].
- Laporte, G., 1989, *A Survey of Algorithms for Location-Routing Problems* [128].
- Eiselt, H. A., Laporte, G., 1989, *Integrated Planning in Distribution System* [68].
- Levy, L., Bodin, L., 1989, *The Arc Oriented Location Routing Problem* [141].

- Salhi, S., Rand, G. K., 1989, *The Effect of Ignoring Routes when Locating Depots* [188].
- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1989, *Plant Location and Vehicle Routing in the Malaysian Rubber Smallholder Sector: A Case Study* [169].
- Zografos, K. G., Samara, S., 1989, *Combined Location-Routing Model for Hazardous Waste Transportation and Disposal* [215].
- Branco, I. M., Coelho, J. D., 1990, *The Hamiltonian p -Median Problem* [32].
- Bertsimas, J., Jaillet, P., Odoni, A. R., 1990, *A Priori Optimization* [25].
- Srivastava, R., Benton, W. C., 1990, *The Location-Routing Problem: Considerations in Physical Distribution System Design* [199].
- ReVelle, C., Cohon, J., Shobrys, D., 1991, *Simultaneous Siting and Routing in the Disposal of Hazardous Wastes* [182].
- Simchi-Levi, D., 1991, *The Capacitated Traveling Salesman Location Problem* [195].
- List, G. F., Mirchandani, P., 1991, *An Integrated Network/Planar Multiobjective Model for Routing and Siting for Hazardous Materials and Wastes* [143].
- List, G. F., Mirchandani, P. B., Turnquist, M. A., Zografos, K. G., 1991, *Modeling and Analysis for Hazardous Materials Transportation: Risk Analysis, Routing/Scheduling and Facility Location* [144].
- Stowers, C. L., Palekar, U. S., 1993, *Location Models with Routing Considerations for a Single Obnoxious Facility* [201].
- Boffey, B., Karkasis, J., 1993, *Models and Methods for Location and Routing Decisions Relating to Hazardous Materials* [29].
- Srivastava, R., 1993, *Alternate Solution Procedures for the Location-Routing Problem* [198].
- Chien, T. W., 1993, *Heuristic Procedures for Practical-Sized Uncapacited Location-Capacitated Routing Problems* [43].
- Wong, D. W. S., Meyer, J. W., 1993, *A spatial decision support system approach to evaluate the efficiency of meals-on wheels program* [212].
- Jamil, M., Batta, R., Malon, D., 1994, *The Traveling Repairperson Home Base Location Problem* [111].

- Hansen, P. H., Hegedahl, B., Hjortkjaer, S., Obel, B., 1994, *A Heuristic Solution to the Warehouse Location-Routing Problem* [102].
- Averbakh, I., Berman, O., 1994, *Routing and Location-Routing p-Delivery Men Problems on a Path* [6].
- Berman, O., Jaillet, P., Simchi-Levi, D., 1995, *Location-Routing Problems with Uncertainty* [22].
- Averbakh, I., Berman, O., 1995, *Probabilistic Sales-Delivery Man and Sales-delivery Facility Location Problems on a Tree* [7].
- Klose, A., 1995, *Using Clustering Methods in Problems of Combined Location and Routing* [118].
- Salhi, S., Fraser, M., 1996, *An Integrated Heuristic Approach for the Combined Location Vehicle Fleet Mix Problem* [185].
- Nagy, G., Salhi, S., 1996, *Nested Heuristic Methods for the Location-Routing Problem* [164].
- Nagy, G., Salhi, S., 1996, *A Nested Location-Routing Heuristic Using Route Length Estimation* [165].
- Min, H., 1996, *Consolidation Terminal Location-Allocation and Consolidated Routing Problems* [156].
- Derks, J. J. M., Spieksma, F. C. R., 1996, *A Decision Support System for Locating Facilities and Routing Traffic on a Factory Site* [60].
- Bruns, A., Klose, A., 1997, *A “Locate First – Route Second” Heuristic for a Combined Location-Routing Problem* [34].
- Coutinho-Rodrigues, J., Clímaco, J., Current, J., Ratick, S., 1997, *An Interactive Spatial Decision System for Multiobjective HAZMAT Location-Routing Problems* [50].
- Giannikos, I., 1998, *A Multiobjective Programming Model for Locating Treatment Sites and Routing Hazardous Wastes* [90].
- Nagy, G., Salhi, S., 1998, *The Many-to-Many Location-Routing Problem* [166].
- Min, H., Jayaraman, V., Rajesh, S., 1998, *Combined Location-Routing Problems: A Synthesis and Future Research Directions* [158].
- Murty, K. G., Djang, P. A., 1999, *The U.S. Army National Guard’s Mobile Training Simulators Location and Routing Problem* [162].

- Salhi, S., Nagy, G., 1999, *Consistency and Robustness in Location-Routing* [186].
- Tuzun, D., Burke, L. I., 1999, *A Two-Phase Tabu Search Approach to the Location Routing Problem* [206].
- Ghiani, G., Laporte, G., 1999, *Eulerian location problems* [87].
- Johnson, M. P., Gorr, W. L., Roehrig, S. F., Heinz, J. H., 2000, *Location/Allocation/Routing for Home-Delivered Meals Provision: Models & Solution Approaches* [113].
- Chan, Y., Carter, W. B., Burness, M. D., 2001, *A multi-Depot, Multi-Vehicle, Location-Routing Problem with Stochastically Processed Demands* [42].
- Ghiani, G., Laporte, G., 2001, *Location-Arc Routing Problems* [88].
- Wu, T., Low, C., Bai, J., 2002, *Heuristic Solutions to Multi-Depot Location-Routing Problems* [214].
- Lee, Y., Kim, S., Lee, S., Kang, K., 2003, *A Location-Routing Problem in Designing Optical Internet Access with WDM Systems* [139].
- Cappanera, P., Gallo, G., Maffioli, F., 2004, *Discrete Facility Location and Routing of Obnoxious Activities* [36].

O gráfico ilustrado na figura C.1 indica o número de publicações anuais. Destacam-se, com 4 publicações os anos de 1981, 1991 e 1999; com 5 publicações os anos de 1985, 1988, 1993 e 1996 e com 8 o ano de 1989. Desde então, após o pico atingido em 1989, assiste-se a um declínio acentuado e contínuo do número de publicações anuais. Na figura C.2 é indicado o número de publicações por década.

C.2 Bibliografia Por Autor

Nas várias publicações participaram 122 autores. Muitas vezes os artigos publicados pelo mesmo autor ou pelo mesmo grupo de autores revelam estudos progressivos sobre o mesmo tema ou temas afins, apresentando uma continuidade na investigação e profundidade crescente nas propostas de resolução. Para facilitar a pesquisa sobre as linhas de investigação continuada e personalizada são agrupados os autores com mais do que uma publicação. Os autores com uma única publicação podem ser consultados no capítulo 3.

Maranzana

- Maranzana, F. E., 1963, *On the Location of Supply Points to Minimize Transportation Costs* [147].

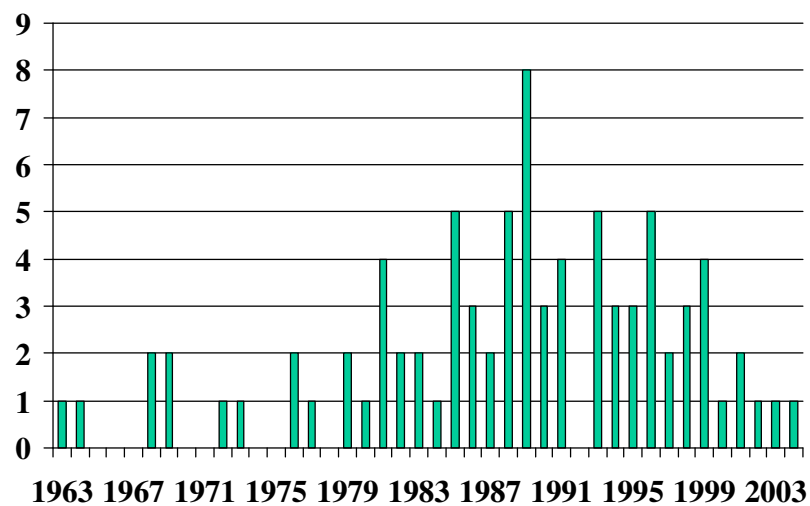


Figura C.1: Número de publicações anuais.

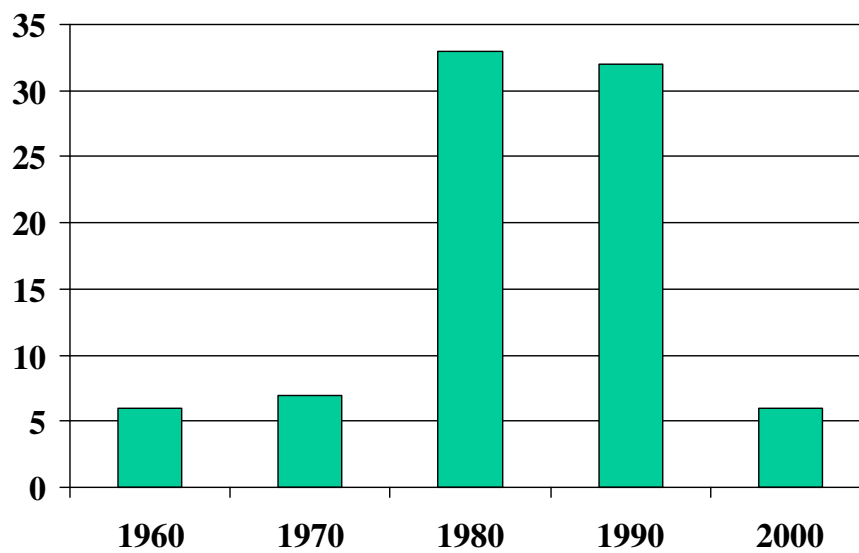


Figura C.2: Número de publicações por década.

- Maranzana, F. E., 1964, *On the Location of Supply Points to Minimize Transport Costs* [148].

Madsen

- Jacobsen, S. K., Madsen, O. B. G., 1980, *A Comparative Study of Heuristics for a Two-Level Routing-Location Problem* [109].
- Madsen, O. B. J., 1981, *A Survey of Methods for Solving Combined Location-Routing Problems* [146].
- Madsen, O. B. G., 1983, *Methods for Solving Combined Two Level Location-Routing Problems of Realistic Dimensions* [145].

Nambiar, Gelders e Wassenhove,

- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1981, *A Large Scale Location-Allocation Problem in the Natural Rubber Industry* [168].
- Nambiar, J. M., Gelders, L. F., Wassenhove, L. N., 1989, *Plant Location and Vehicle Routing in the Malaysian Rubber Smallholder Sector: A Case Study* [169].

Laporte, Norbert e Ghiani

- Laporte, G., Norbert, Y., 1981, *An Exact Algorithm for Minimizing Routing and Operating Cost in Depot Location* [132].
- Laporte, G., Norbert, Y., Pelletier, P., 1983, *Hamilton Location Problems* [135].
- Laporte, G., Norbert, Y., Arpin, D., 1986, *An Exact Algorithm for Solving a Capacitated Location-Routing Problem* [134].
- Labbé, M., Laporte, G., 1986, *Maximizing User Convenience and Postal Service Efficiency in Post Box Location* [123].
- Laporte, G., Norbert, Y., Taillefer, S., 1988, *Solving a Family of Multi-Depot Vehicle Routing and Location-Routing Problems* [136].
- Laporte, G., 1988, *Location-Routing Problems* [127].
- Laporte, G., Dejax, P. J., 1989, *Dynamic Location-Routing Problems* [130].
- Laporte, G., Louveaux, F., Mercure, H., 1989, *Models and Exact Solutions for a Class of Stochastic Location-Routing Problems* [131].

- Laporte, G., 1989, *A Survey of Algorithms for Location-Routing Problems* [128].
- Eiselt, H. A., Laporte, G., 1989, *Integrated Planning in Distribution System* [68].
- Ghiani, G., Laporte, G., 1999, *Eulerian location problems* [87].
- Ghiani, G., Laporte, G., 2001, *Location-Arc Routing Problems* [88].

Drezner e Wesolowsky

- Drezner, Z., Wesolowsky G.O., 1982, *A Trajectory Approach to the Round-Trip Location Problem* [65]
- Drezner, Z., 1982. *Fast Algorithms for the Round Trip Location Problem* [61].
- Drezner, Z., 1985, *$O(N \log N)$ Algorithm for the Rectilinear Round-Trip Location Problem* [62].
- Drezner, Z., Steiner, G., Wesolowsky, G. O., 1985, *One-Facility Location with Rectilinear Tour Distances* [64].

Perl e Daskin

- Perl, J., Daskin, M. S., 1984, *A Unified Warehouse Location-Routing Methodology* [177].
- Perl, J., Daskin, M. S., 1985, *A warehouse Location-Routing Problem* [178].
- Daskin, M. S., 1987, *Location, Dispatching, and Routing Models for Emergency Services with Stochastic Travel Times* [57].

Berman, Simchi-Levi, Averbakh e Jaillet

- Berman, O., Simchi-Levi, D., 1986, *Minisum Location of a Travelling Salesman* [23].
- Berman, O., Simchi-Levi, D., 1988. *Finding the Optimal a Priori Tour and Location of a Traveling Salesman with Nonhomogeneous Customers* [24].
- Simchi-Levi, D., Berman, O., 1988, *A heuristic Algorithm for the Traveling Salesman Location Problem* [196].
- Averbakh, I., Berman, O., 1994, *Routing and Location-Routing p-Delivery Men Problems on a Path* [6].

- Averbakh, I., Berman, O., 1995, *Probabilistic Sales-Delivery Man and Sales-delivery Facility Location Problems on a Tree* [7].
- Simchi-Levi, D., 1991, *The Capacitated Traveling Salesman Location Problem* [195].
- Berman, O., Jaillet, P., Simchi-Levi, D., 1995, *Location-Routing Problems with Uncertainty* [22].
- Bertsimas, J., Jaillet, P., Odoni, A. R., 1990, *A Priori Optimization* [25].

Salhi e Nagy

- Salhi, S., Rand, G. K., 1989, *The Effect of Ignoring Routes when Locating Depots* [188].
- Salhi, S., Fraser, M., 1996, *An Integrated Heuristic Approach for the Combined Location Vehicle Fleet Mix Problem* [185].
- Nagy, G., Salhi, S., 1996, *Nested Heuristic Methods for the Location-Routing Problem* [164].
- Nagy, G., Salhi, S., 1996, *A Nested Location-Routing Heuristic Using Route Length Estimation* [165].
- Nagy, G., Salhi, S., 1998, *The Many-to-Many Location-Routing Problem* [166].
- Salhi, S., Nagy, G., 1999, *Consistency and Robustness in Location-Routing* [186].

Srivastava

- Srivastava, R., Benton, W. C., 1990, *The Location-Routing Problem: Considerations in Physical Distribution System Design* [199].
- Srivastava, R., 1993, *Alternate Solution Procedures for the Location-Routing Problem* [198].

List e Mirchandani

- List, G. F., Mirchandani, P., 1991, *An Integrated Network/Planar Multiobjective Model for Routing and Siting for Hazardous Materials and Wastes* [143].
- List, G. F., Mirchandani, P. B., Turnquist, M. A., Zografos, K. G., 1991, *Modeling and Analysis for Hazardous Materials Transportation: Risk Analysis, Routing/Scheduling and Facility Location* [144].

- Zografos, K. G., Samara, S., 1989, *Combined Location-Routing Model for Hazardous Waste Transportation and Disposal* [215].

Klose

- Klose, A., 1995, *Using Clustering Methods in Problems of Combined Location and Routing* [118].
- Bruns, A., Klose, A., 1997, *A “Locate First – Route Second” Heuristic for a Combined Location-Routing Problem* [34].

Min

- Min, H., 1996, *Consolidation Terminal Location-Allocation and Consolidated Routing Problems* [156].
- Min, H., Jayaraman, V., Rajesh, S., 1998, *Combined Location-Routing Problems: A Synthesis and Future Research Directions* [158].

A tabela C.1 indica o número de artigos por autor. Destaca-se claramente Laporte com 12 artigos, em seguida surgem Berman e Salhi com 6, Simchi-Levi com 5, Nagy, Nobert e Drezner com 4 e Daskin e Madsen com 3.

C.3 Bibliografia Por Meio de Comunicação

A divulgação dos estudos científicos privilegiou a publicação em revistas periódicas, no entanto também se recorreu a outras formas de publicação. O panorama geral é o seguinte:

- revistas periódicas - 76 publicações,
- *proceedings* - 2 publicações,
- participação em livros - 5 publicações,
- *Internet* - 1 publicação.

Na tabela C.2 são identificados os meios de comunicação, indicando o ano de publicação, o número de publicações em cada ano e o número total de artigos. O *record* de publicações pertence à revista *Transportation Science* com 17 publicações, seguida de perto pela revista *European Journal of Operational Research*, com 14. A revista *Operational Research Quarterly* ficará para sempre ligada aos PLD ao publicar entre 1970

Tabela C.1: Número de publicações por autor.

Acharya, D.	1	Giannikos, I.	1	Nagy, G.	4
Arpin D.	1	Ghosh, J. K.	1	Nambiar, J. M.	2
Averbakh, I.	2	Gorr, W. L.	1	Nobert, Y.	4
Bai, J.	1	Griffiths, D. O.	1	Obel, B.	1
Balakrishnan, A.	1	Hansen, P. H.	1	Odoni, A. R.	1
Batta, R.	1	Harrison, H.	1	Or, I.	1
Benton, W. C.	1	Hearn, D. W.	1	Palekar, U. S.	1
Berman, O.	6	Hegedahl, B.	1	Pelletier P.	1
Bertsimas, J.	1	Heinz, J. H.	1	Pengilly, P.	1
Bodin, L.	1	Hjortkjaer, S.	1	Perl, J.	2
Boffey, B.	1	Holliday, A.	1	Pierskalla, W. P.	1
Bookbinder, J.	1	Ichimori, T.	1	Rajesh, S.	1
Branco, I. M.	1	Jacobsen, S. K.	1	Rand, G. K.	1
Bruns, A.	1	Jaillet, P.	2	Ratick, S.	1
Burke, L. I.	1	Jamil, M.	1	Reece, K. E.	1
Burness, M. D.	1	Jayaraman, V.	1	ReVelle, C.	1
Burness, R. C.	1	Johnson, M. P.	1	Roehrig, S. F.	1
Cappanera, P.	1	Kang, K.	1	Salhi, S.	6
Carter, W. B.	1	Karkasis, J.	1	Samara, S.	1
Chan, A. W.	2	Kim, S.	1	Shobrys, D.	1
Chan, Y.	1	Kolen, A.	1	Simchi-Levi, D.	5
Chien, T. W.	1	Klose, A.	2	Sinha, S. B.	1
Christofides, N.	1	Labbé, M.	1	Spieksma, F. C. R.	1
Clímaco, J.	1	Laporte, G.	12	Srivastava, R.	2
Coelho, J. D.	1	Lawrence, R. M.	1	Steiner, G.	1
Cohon, J.	1	Lee, S.	1	Stowers, C. L.	1
Coutinho-Rodrigues, J.	1	Lee, Y.	1	Taillefer S.	1
Current, J.	1	Levy, L.	1	Turnquist, M. A.	1
Daskin, M. S.	3	List, G. F.	2	Tuzun, D.	1
Dejax, P. J.	1	Louveaux, F.	1	Ward, J. E.	1
Derks, J. J. M.	1	Low, C.	1	Wassenhove, L. N.	2
Djang, P. A.	1	Madsen, O. B. J.	3	Watson-Gandy, C. D. T.	1
Dohrn, P. J.	1	Maffioli, F.	1	Webb, M. H. J.	1
Drezner, Z.	4	Malon, D. M.	1	Wesolowsky, G. O.	2
Eiselt, H. A.	1	Maranzana, F. E.	2	White, J. A.	1
Eilon, S.	1	Mercure H.	1	Wong, D. W. S.	1
Francis, R. L.	1	Meyer, J. W.	1	Wong, R. T.	1
Fraser, M.	1	Min, H.	2	Wren, A.	1
Gallo, G.	1	Mirchandani, P.	2	Wu, T.	1
Gelders, L. F.	2	Murty, K. G.	1	Zografos, K. G.	1
Ghiani G.	2	Nishida, T.	1		

Tabela C.2: Número de artigos por meio de publicação.

PUBLICAÇÃO	ANO (nº)	Nº
AIIE Transactions	79	1
American Journal of Mathematical and Management Sciences	87	1
Applied Statistics	68	1
Belgian Journal of Operations Research	86	1
Computers & Operations Research	90,01,02	3
Decisions Science	93	1
Discrete Applied Mathematics	04	1
European Journal of Operational Research	72,80,81,83(2),88,89(3),90,94,98(2),99	14
IBM Systems Journal	63	1
IIE Transactions	82	1
INFOR	89	1
International Journal of Physical Distribution and Material Management	89	1
Interfaces	79	1
International Journal of Industrial Engineering	00	1
Investigación Operativa	89	1
Journal of Business Logistics	84,96	2
Journal of the Operational Research Society	86,89,96	3
Naval Research Logistics Quarterly	85	1
Networks	86,99	2
OMEGA The International Journal of Management Sciences	73,93	2
Operational Research Quarterly	64,68,69(2),72	5
Operations Research	88,90,99	3
OPSEARCH	01	1
Photonic Network Communications	03	1
Professional Geographer	93	1
Studies In Locational Analysis	96(2),93,97,99	5
Top	98	1
Transportation Research B	85	1
Transportation Research Record	89	1
Transportation Science	76(2),77,82,85(3),88(2),91(4),93,94(2),95	17
Operations Research Proceedings	95,97	2
Participação em Livros	81(2),87,88,95	5
Internet	96	1
Total		84

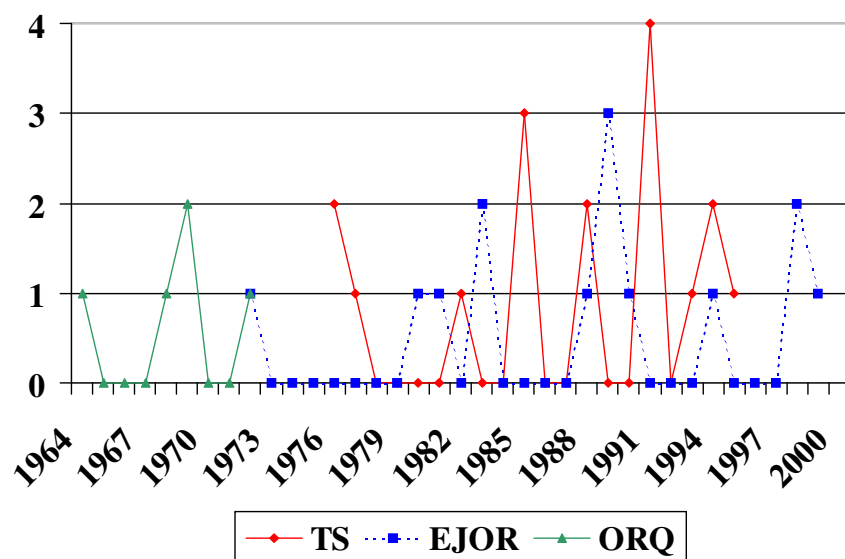


Figura C.3: Número de publicações nas principais revistas.

e 1977 nada menos que 5 artigos, a maior densidade de artigos sobre PLD e logo nos seus primórdios. Tendo alterado, em 1978, o seu nome para Journal of the Operational Research Society, publicou ainda mais 3 artigos relacionados com os PLD. A revista IIE Transactions é continuação da AIIE Transactions.

A figura C.3 ilustra a variação de publicações sobre PLD nas revistas mais emblemáticas, Transportation Science (TS), European Journal of Operational Research (EJOR) e Operations Research Quarterly (ORQ). É claramente visível o carácter pioneiro de ORQ e o interessante despique nas décadas de 80 e 90 entre a TS e a EJOR.

Apêndice D

Resolução do PLDC com base em formulações com 3 índices

A formulações com 3 índices para o PLDC, apresentadas na secção 6.3.2 (p. 132), embora mais pesadas em termos do número de variáveis, podem também servir de base à construção de um algoritmo de resolução exacta, tal como se segue.

Algoritmo 10 *Resolução Exacta do PLDC (formulação PLDC.3i.no)*

Dados: Coordenadas de $N = \{1, 2, \dots, n\}$ clientes no plano com encomenda $e_i : i = 1, 2, \dots, n$.

Coordenadas de $P = \{n + 1, n + 2, \dots, n + p\}$ potenciais CA com capacidade u_k e custo de instalação $f_k : k = 1, 2, \dots, p$.

$w =$ capacidade dos veículos.

Resultados: Rotas dos veículos apoiadas nos CA.

Passo 1. Determinar o número de potenciais rotas. Seja $r = \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w}$ e $\text{Frac}(r)$ a parte fraccionária de r .

Se $\text{Frac}(r) \leq 0,5$ então $r = \lfloor r \rfloor + 1$.

Se $\text{Frac}(r) > 0,5$ então $r = \lfloor r \rfloor + 2$.

Passo 2. Considerar um conjunto de possíveis rotas $R = \{1, 2, \dots, r\}$.

Passo 3. Resolver o PLDC tal como formulado em PLDC.3i.no (p. 133), relaxando as restrições (6.35).

Passo 4. Avaliar a existência de percursos ilegais, isto é, sub-rotas sem CA.

Passo 5. *Se existem sub-rotas sem CA, aplicar as restrições de eliminação respectivas e voltar ao passo 3. Caso contrário, terminar, a solução corrente é ótima.*

No passo 1 do algoritmo anterior é determinado o número máximo de rotas. Trata-se de um valor indispensável à aplicação da formulação *PLDC.3i.no* que deve ser alvo de uma cuidada escolha. Um número de potenciais rotas exagerado (acima do estritamente necessário) pode inviabilizar a aplicação do algoritmo ao promover um grande número de variáveis. Por outro lado, é fundamental considerar um número mínimo de rotas que permita a distribuição de todas as encomendas (de acordo com a capacidade dos veículos).

O número de rotas necessárias para distribuir todas as encomendas dos clientes é determinado a partir do valor real $r = \frac{\sum_{i \in N} e_i}{w}$. É necessário transformar o real r num inteiro, que mantenha a admissibilidade do problema, mas seja o mais pequeno possível. A solução encontrada é exemplificada como se segue.

$$\begin{aligned} \text{Se } 1,5 < r \leq 2,5 & \text{ então } r = 3 \\ \text{Se } 2,5 < r \leq 3,5 & \text{ então } r = 4 \\ \dots & \\ \text{Se } t,5 < r \leq t+1,5 & \text{ então } r = t+2 \end{aligned}$$

Desta forma, há sempre alguma folga nas rotas que permite adaptar a solução do problema. Não se trata de uma grande margem, na pior das hipóteses é de metade da capacidade de um veículo, mas os exemplos práticos de resolução de PLDC mostram que as melhores soluções são obtidas com o número mínimo de rotas. Obviamente, se esta folga não for suficiente é sempre possível, no passo 1, fazer descer o valor de 0,5. Aumentando este valor diminui-se a margem de manobra, saturando mais as rotas.

Como se pode verificar, por comparação com o algoritmo 1, não é necessário acrescentar nas iterações subsequentes as restrições de eliminação de sub-rotas com excesso de capacidade ou de cadeias entre CA. Estas são incluídas de imediato nas restrições iniciais. É uma grande vantagem das formulações com 3 índices relativamente às formulações com 2 índices.

Com base neste algoritmo, foi construído um programa informático que funciona de forma idêntica ao que foi apresentado na secção 7.3.2 (p. 145). O quadro final deste *software* apresenta-se como ilustra a figura D.1, em que é mostrada a solução da instância Perl83 - 12x2. Com este software podem ser resolvidos PLDC com 15 clientes, 4 potenciais CA e 3 rotas em cerca de dois minutos e determinados limites inferiores do valor da solução ótima para instâncias maiores, com 20 clientes, 10 CA e 3 rotas.

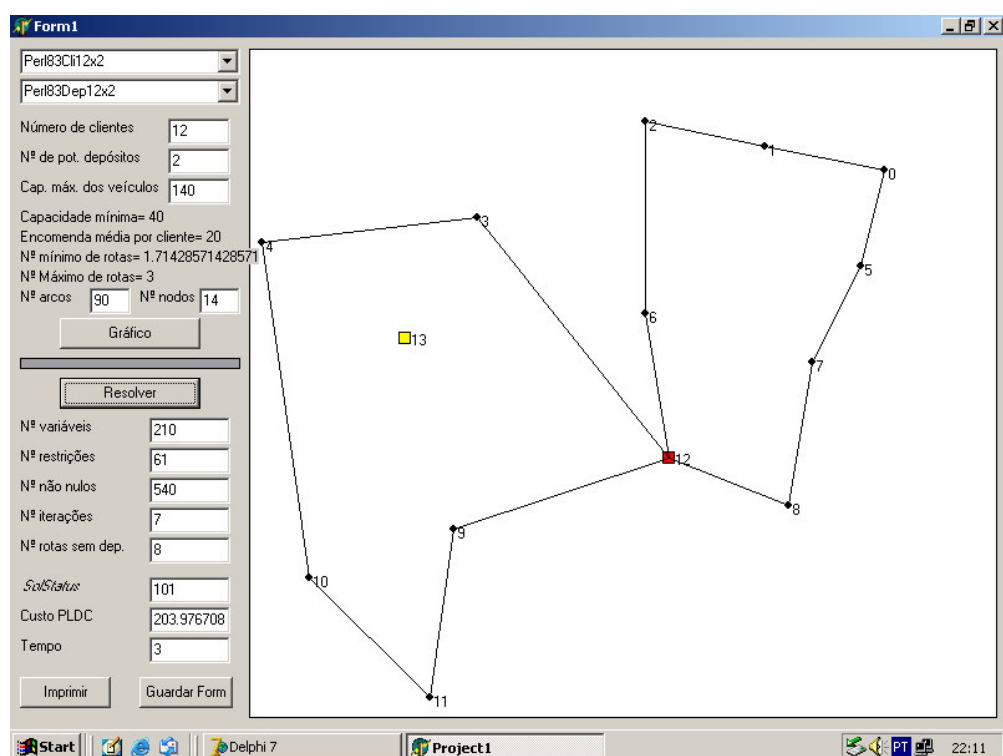


Figura D.1: Resolução do PLDC com base na formulação *PLDC.3i.no* - quadro final.

Bibliografia

- [1] AHMADI, S. *Metaheuristics for the Capacitated Clustering Problems*. PhD thesis, University of Kent at Canterbury, UK, September 1998.
- [2] AHUJA, R. K., ORLIN, J. B., PALLOTINO, S., SCAPARRA, M. P. e SCUTELLÀ, M. G. A multi-exchange heuristic for the single source capacitated facility location problem. *Management Science* 50, 6 (2004), 749–760.
- [3] AIKENS, C. H. Facility location models for distribution planning. *European Journal of Operational Research* 22 (1985), 263–279.
- [4] ALMEIDA, A. M. e RODRIGUES, M. R. D. Sobre a questão do algoritmo para o problema do caixeiro viajante. *Gazeta de Matemática*, 138 (Janeiro 2000), 29–39.
- [5] ANDERBERG, M. R. *Cluster Analysis for Applications*. Academic Press, New York, 1973.
- [6] AVERBAKH, I. e BERMAN, O. Routing and location-routing p-delivery men problems on a path. *Transportation Science* 28, 2 (1994), 162–166.
- [7] AVERBAKH, I. e BERMAN, O. Probabilistic sales-delivery man and sales-delivery facility location problems on a tree. *Transportation Science* 29, 2 (1995), 184–197.
- [8] BALAKRISHNAN, A., WARD, J. E. e WONG, R. T. Integrated facility location and vehicle routing models: Recent work and future prospects. *American Journal of Mathematics and Management Sciences* 7, 1,2 (1987), 35–61.
- [9] BALL, M. e MAGAZINE, M. The design and analysis of heuristics. *Networks* 11 (1981), 215–219.
- [10] BALLOU, R. H. *Business Logistics Management*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1992.
- [11] BARRETO, S. S. O problema de cobertura dos vértices de um grafo por um número fixo de ciclos disjuntos nos vértices. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa - Portugal, 1993.

- [12] BARRETO, S. S., CARLOS, M. S. F. e PAIXÃO, J. M. P. Problemas de localização-distribuição em bibliografia anotada. *Working Paper número 1/2004, Centro de Investigação Operacional, DEIO, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.* (2004).
- [13] BARRETO, S. S., FERREIRA, C. M. e PAIXÃO, J. P. Problemas de localização-distribuição: Uma revisão bibliográfica. *VI Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións* (Novembro 2003), 93–100. Departamento de Estatística e Investigación Operativa da Universidade de Vigo, Vigo, Espanha.
- [14] BARRETO, S. S., FERREIRA, C. M. e PAIXÃO, J. P. Using clustering analysis is a capacitated location-routing problem. Comunicação apresentada no EWGLA 14, XIV Meeting of the European Working Group on Locational Analysis, Corfu, Grécia., Setembro 2003.
- [15] BARRETO, S. S., FERREIRA, C. M. e PAIXÃO, J. P. Formulações de compromisso para um problema de localização-distribuição com capacidade. Comunicação apresentada no IO 2004, XI Congresso da APDIO, Porto, Portugal, Abril 2004.
- [16] BAUMOL, W. J. e WOLFE, P. A warehouse-location problem. *Operations Research* 6, 2 (1958), 252–263.
- [17] BAYNE, C. K., BEAUCHAMP, J. J., BEGOVICH, C. L. e KANE, V. E. Monte carlo comparasions of selected clustering procedures. *Pattern Recognition* 12 (1980), 51–62.
- [18] BEDNAR, V. L. e STROHMEIER, E. Lagerstandortoptimierung und fuhrparkein-satzplanung in der konsumgüter-industrie. *Zeitschrift für Operations Research* 23 (1979), B89–B104.
- [19] BELLMAN, R. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics* 16 (1958), 87–90.
- [20] BELLMORE, M. e MALONE, J. C. Pathology of traveling-salesman subtour-elimination algorithms. *Operations Research* 19, 2 (1971), 278–307.
- [21] BERGER, R. T. *Location-Routing Models for Distribution System Design*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, Dezembro 1997.
- [22] BERMAN, O., JAILLET, P. e SIMCHI-LEVI, D. Location-routing problems with uncertainty. In *Facility Location: A Survey of Applications and Methods* (New York, 1995), Z. Drezner, Ed., Springer-Verlag, pp. 427–453.
- [23] BERMAN, O. e SIMCHI-LEVI, D. Minisum location of a traveling salesman. *Networks* 16 (1986), 239–254.

- [24] BERMAN, O. e SIMCHI-LEVI, D. Finding the optimal a priori tour and location of a traveling salesman with nonhomogeneous customers. *Transportation Science* 22, 2 (1988), 148–154.
- [25] BERTSIMAS, D. J., JAILLET, P. e ODONI, A. R. A priori optimization. *Operations Research* 38 (1990), 1019–1033.
- [26] BLASHFIELD, R. K. Mixture model tests of cluster analysis: Accuracy of four agglomerative hierarchical methods. *Psychological Bulletin* 83 (1976), 377–388.
- [27] BODIN, L. e GOLDEN, B. Classification in vehicle routing and scheduling. *Networks* 11 (1981), 97–108.
- [28] BODIN, L. D. A taxonomic structure for vehicle routing and scheduling problems. *Computers and Urban Society* 1 (1975), 11–29.
- [29] BOFFEY, T. B. e KARKAZIS, J. Models and methods for location and routing decisions relating to hazardous materials. *Studies in Locational Analysis* 5 (1993), 149–166.
- [30] BOOKBINDER, J. H. e REECE, K. E. Vehicle routing considerations in distribution system design. *European Journal of Operational Research* 37 (1988), 204–213.
- [31] BORLAND SOFTWARE CORPORATION. *Borland Delphi 7.0*. Scotts Valley, CA, 2002.
- [32] BRANCO, I. M. e COELHO, J. D. The hamiltonian p-median problem. *European Journal of Operational Research* 47 (1990), 86–95.
- [33] BRUNS, A. e KLOSE, A. An iterative heuristic for location-routing problems based on clustering. In *Proceedings of the Second International Workshop on Distribution Logistics* (Oegstgeest, The Netherlands, 1995), pp. 1–6.
- [34] BRUNS, A. e KLOSE, A. A "locate first - route second" heuristic for a combined location-routing problem. In *Operations Research Proceedings* (1997), Springer, pp. 49–54.
- [35] BURNES, R. C. e WHITE, J. A. The traveling salesman location problem. *Transportation Science* 10, 4 (Novembro 1976), 348–360.
- [36] CAPPANERA, P., GALLO, G. e MAFFIOLI, F. Discrete facility location and routing of obnoxious activities. *Discrete Applied Mathematics* 133 (2004), 3–28.
- [37] CARROLL, T. M. e DEAN, R. D. A bayesian approach to plant-location decisions. *Decision Sciences* 11, 1 (1980), 81–89.

- [38] CARVALHO, J. M. C. *Logística*. Edições Sílabo, Lda, Lisboa, 1996.
- [39] CASILLAS, P. A. Data agregation and the p-median problem in continous space. In *Spatial Analysis and Location-Allocation Models* (New York, 1987), A. Ghosh e G. Rushton, Eds., Van Nostrand Reinhold Company, pp. 327–344.
- [40] CHAN, A. W. e FRANCIS, R. L. A round-trip location problem on a tree graph. *Transportation Science* 10 (1976), 35–51.
- [41] CHAN, A. W. e HEARN, D. W. A rectilinear distance round-trip location problem. *Transportation Science* 11, 2 (1977), 107–123.
- [42] CHAN, Y., CARTER, W. B. e BURNES, M. D. A multiple-depot, multiple-vehicle, location-routing problem with stochastically processed demands. *Computers and Operations Research* 28 (2001), 803–826.
- [43] CHIEN, T. W. Heuristic procedures for practical-sized uncapacited location-capacited routing problems. *Decisions Sciences* 24, 5 (1993), 995–1021.
- [44] CHRISTOFIDES, N. The vehicle routing problem. *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle* 10, 2 (1976), 55–70.
- [45] CHRISTOFIDES, N. e EILON, S. An algorithm for the vehicle-dispatching problem. *Operational Research Quarterly* 20, 3 (1969), 309–318.
- [46] CHRISTOFIDES, N. e EILON, S. Expected distances in distribution problems. *Operational Research Quarterly* 20 (1969), 437–443.
- [47] CLARK, G. e WRIGHT, J. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research* 12 (1964), 568–581.
- [48] COOPER, L. Location-allocation problems. *Operations Research* 11 (1963), 331–343.
- [49] COOPER, L. Heuristic methods for location-allocation problems. *SIAM Review* 6, 1 (January 1964), 37–53.
- [50] COUTINHO-RODRIGUES, J., CLÍMACO, J., CURRENT, J. e RATICK, S. An interactive spatial decision support system for multiobjective HAZMAT location-routing problems. *Studies in Location Analysis* 9 (1997), 39–42.
- [51] CROES, G. A. A method for solving traveling-salesman problems. *Operations Research* 6 (1958), 791–812.
- [52] CULLEN, F. H., JARVIS, J. J. e RATLIFF, D. H. Set partitioning based heuristics for interactive routing. *Networks* 11 (1981), 125–143.

- [53] CUNNINGHAM, K. M. e OGILVIE, J. C. Evaluation of hierarchical grouping techniques: A preliminary study. *Computer Journal* 15 (1972), 209–213.
- [54] DANTZIG, G. B., FULKERSON, D. R. e JOHNSON, S. M. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Operations Research* 2 (1954), 393–410.
- [55] DANTZIG, G. B. e RAMSER, J. H. The truck dispatching problem. *Management Science* 6, 1 (Outubro 1959), 80–91.
- [56] DASKIN, M. S. Logistics: An overview of the state of the art and perspectives on future research. *Transportation Research A* 19A, 5/6 (1985), 383–398.
- [57] DASKIN, M. S. Location, dispatching, and routing models for emergency services with stochastic travel times. In *Spatial Analysis and Location-Allocation Models* (New York, 1987), A. Ghosh e G. Rushton, Eds., Van Nostrand Reinold Co., pp. 224–265.
- [58] DASKIN, M. S. *Network and Discrete Location*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.
- [59] DEJAX, P. J. A methodology for warehouse location and distribution systems planning. In *Proceedings of the 2nd International Seminar on Freight Transport Planning and Logistics* (Bressabone, Italy, 1988).
- [60] DERKS, J. J. M. e SPIEKSMAN, F. C. R. A decision support system for locating facilities and routing traffic on a factory site. [http://www-edocs.unimaas.nl/files/rep96009.pdf](http://www.edocs.unimaas.nl/files/rep96009.pdf) (1996). (Conferido em 02/03/2004).
- [61] DREZNER, Z. Fast algorithms for the round trip location problem. *IIE Transactions* 14 (1982), 243–248.
- [62] DREZNER, Z. $O(N \log N)$ algorithm for the rectilinear round-trip location problem. *Transportation Science* 19, 1 (1985), 91–93.
- [63] DREZNER, Z. *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [64] DREZNER, Z., STEINER, G. e WESOLOWSKY, G. O. One-facility location with rectilinear tour distances. *Naval Research Logistics Quarterly* 32 (1985), 391–405.
- [65] DREZNER, Z. e WESOLOWSKY, G. O. A trajectory approach to the round-trip location problem. *Transportation Science* 16, 1 (1982), 56–66.
- [66] EDELBROCK, C. e MCCLAUGHLIN, B. Hierarchical cluster analysis using intraclass correlations: A mixture model study. *Multivariate Behavioral Research* 15 (1980), 299–318.

- [67] EILON, S., WATSON-GANDY, C. D. T. e CHRISTOFIDES, N. *Distribution Management: Mathematical Modelling and Practical Analysis*. Charles Griffin and Company Limited, London, 1971.
- [68] EISELT, H. A. e LAPORTE, G. Integrated planning in distribution systems. *International Journal of Physical Distribution and Materials Management* 19, 4 (1989), 14–19.
- [69] ESCOFIER, B. e PAGÈS, J. *Analysis Factorielles Simples e Multiples - Objectifs, Méthods et Interprétation*, 2 ed. Dunod, 1990.
- [70] EVANS, J. R. *Applied Production and Operations Management*, 4th ed. West Publishing Company, New York, 1993.
- [71] EVERITT, B. S. *Cluster Analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [72] EVERITT, B. S. *Cluster Analysis*, 3 ed. Arnold, London, 1993.
- [73] FELDMAN, E., LEHRER, F. A. e RAY, T. L. Warehouse location under continuous economies of scale. *Management Science* 12, 9 (1966), 670–684.
- [74] FERREIRA, C. E., MARTIN, A., SOUZA, C. C., WIESMANTEL, R. e WOLSEY, L. A. The node capacitated graph partitioning problem: A computational study. *Mathematical Programming B* 81 (1998), 229–256.
- [75] FERREIRA, C. M. S. *Problemas de Localização e Distribuição Multicritério - Aproximações e Estudo de Alguns Casos Com Implicações Ambientais*. PhD thesis, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal, 1997.
- [76] FISHER, M. L. e JAIKUMAR, R. A generalized assignment heuristic for vehicle routing. *Networks* 11 (1981), 109–124.
- [77] FORD, L. R. e FULKERSON, D. R. Solving the transportation problem. *Management Science* 3 (1956), 24–32.
- [78] FRANCIS, R. L., MCGINNIS, L. F. e WHITE, J. A. Locational analysis. *European Journal of Operational Research* 12 (1983), 220–252.
- [79] FUKUNAGA, K. e SHORT, R. D. Generalized clustering for problem localization. *IEEE Transactions on Computers C* 27 (1978), 176–181.
- [80] GAREY, M. R. e JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness*, 22 ed. W. R. Freeman and Company, New York, 2000.
- [81] GASKELL, T. J. Bases for vehicle fleet scheduling. *Operational Research Quarterly* 18, 3 (1967), 281–295.

- [82] GAVISH, B. e GRAVES, S. C. The travelling salesman problem and related problems. Working Paper OR 078-78, Operations Research Center, Massachusetts Institute of Technology, 1978.
- [83] GEOFFRION, A. M. e GRAVES, G. M. Multicommodity distribution system design by benders decomposition. *Management Sciences* 20, 5 (1974), 822–844.
- [84] GEOFFRION, A. M. e MCBRIDE, R. Lagrangean relaxation applied to capacited facility location problems. *AIIE Transactions* 10, 1 (1978), 40–47.
- [85] GEOFFRION, A. M. e POWERS, R. F. Facility location analysis is just the beginning (if you do it right). *Interfaces* 10 (1980), 22–30.
- [86] GEPFERT, A. H. Business logistics for better performance. *Harvard Business Review* (November-December 1968), 75–84.
- [87] GHIANI, G. e LAPORTE, G. Eulerian locations problems. *Networks* 34 (1999), 291–302.
- [88] GHIANI, G. e LAPORTE, G. Location-arc routing problems. *OPSEARCH* 38, 2 (2001), 151–159.
- [89] GHOSH, J. K., SINHA, S. B. e ACHARYA, D. A generalized reduced gradient based approach to round-trip location problem. In *Scientific Management of Transport Systems* (Amsterdam, Holland, 1981), N. K. Jaiswal, Ed., North-Holland, pp. 209–213.
- [90] GIANNIKOS, I. A multiobjective programming model for locating treatment sites and routing hazardous wastes. *European Journal of Operational Research* 104 (1998), 333–342.
- [91] GOLDEN, B. L. e ASSAD, A. A. *Vehicle Routing: Methods and Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [92] GOLDEN, B. L., BALL, M. e BODIN, L. Current and future directions in network optimization. *Computers and Operations Research* 8 (1981), 71–81.
- [93] GOLDEN, R. R. e MEEHL, P. E. Detection of biological sex – an empirical test of cluster methods. *Multivariate Behavioral Research* 15 (1980), 475–496.
- [94] GONDRAN, M. e MINOUX, M. *Graphs and Algorithms*. John Wiley and Sons, Chichester, 1984.
- [95] GOWER, J. C. Measures of similarity, dissimilarity, and distance. *Encyclopedia of Statistical Science* 5 (1985), 397–405. Wiley, New York.

- [96] GOWER, J. C. e ROSS, G. J. S. Minimum spanning trees and single linkage cluster analysis. *Applied Statistics* 18 (1969), 54–64.
- [97] GRIFFITHS, D. The use of regression analysis in a depot location exercise. *Applied Statistics* 17, 1 (1968), 57–63.
- [98] GROSS, A. L. A monte carlo method study of the accuracy of a hierarchical grouping procedure. *Multivariate Behavioral Research* 7 (1972), 379–389.
- [99] HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research* 12 (1964), 450–459.
- [100] HALEY, K. B. The siting of depots. *International Journal of Production Research* 2 (1963), 41–45.
- [101] HAMACHER, H. W. e NICKEL, S. Classification of location models. *Location Science* 6 (1998), 229–242.
- [102] HANSEN, P. H., HEGEDAH, B., HJORTKJÆR, S. e OBEL, B. A heuristic solution to the warehouse location-routing problem. *European Journal of Operational Research* 76 (1994), 111–127.
- [103] HARRISON, H. A planning system for facilities and resources in distribution networks. *Interfaces* 9, 2 (1979), 6–22.
- [104] HESKETT, J. L. Logistics: Essencial to strategy. *Harvard Business Review* (Nov.-Dec. 1977), 85–96.
- [105] HOLMBERG, K., RÖNNQVIST, M. e YUAN, D. An exact algorithm for the capacitated facility location problems with single sourcing. *European Journal of Operational Research* 113 (1999), 544–559.
- [106] HOUSE, R. G. e KARRENBAUER, J. J. Logistics system modelling. *International Journal of Physical Distribution and Materials Management* 8, 4 (1982), 189–199.
- [107] ICHIMORI, T. e NISHIDA, T. Note on a rectilinear distance round-trip location problem. *Transportation Science* 19, 1 (1985), 84–91.
- [108] ILOG, INC. *CPLEX 7.1*. Mountain View, CA, 2001.
- [109] JACOBSEN, S. e MADSEN, O. A comparative study of heuristics for a two-level routing-location problem. *European Journal of Operational Research* 5 (1980), 378–387.
- [110] JAIN, A. K. e DUBES, R. C. *Algorithms for Clustering Data*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

- [111] JAMIL, M., BATTA, R. e MALON, D. M. The traveling repairperson home base location problem. *Transportation Science* 28, 2 (1994), 150–161.
- [112] JARDINE, N. e SIBSON, R. *Mathematical Taxonomy*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971.
- [113] JOHNSON, M. P., GORR, W. L. e ROEHRIG, S. F. Location/Allocation/Routing for home-delivered meals provision: Models and solution approaches. *International Journal of Industrial Engineering* 9, 1 (2002), 45–56.
- [114] JOHNSON, R. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, 1998.
- [115] JOHNSON, S. C. Hierarchical clustering schemes. *Psychometrika* 32, 3 (1967), 241–254.
- [116] KAUFMAN, L. e ROUSSEUM, P. J. *Finding Groups in a Data : An Introduction to Cluster Analysis*. John Wiley and Sons, Inc, New York, 1990.
- [117] KEARNEY, A. T. *Measuring and Improving Productivity in Physical Distribution Management – 1984*. National Council of Physical Distribution Management, Oak Brook, Ill, 1984.
- [118] KLOSE, A. Using clustering methods in problems of combined location and routing. In *Operations Research Proceedings* (1995), Springer, pp. 411–416.
- [119] KOLEN, A. The round-trip p-center and covering problem on a tree. *Transportation Science* 19, 3 (1985), 222–234.
- [120] KRARUP, J. e PRUZAN, P. M. Selected families of location problems. *Annals of Discrete Mathematics* 5 (1979), 327–387.
- [121] KUEHN, A. A. e HAMBURGER, M. J. A heuristic program for locating warehouses. *Management Science* 9, 4 (1963), 643–666.
- [122] KUIPER, F. K. e FISHER, L. A. Monte carlo comparision of six clustering procedures. *Biometrics* 31 (1975), 777–783.
- [123] LABBÉ, M. e LAPORTE, G. Maximizing using convenience and postal service efficiency in post box location. *Belgian Journal of Operations Research* 26, 2 (1986), 21–35.
- [124] LAMBERT, D. e STOCK, J. *Strategic Logistics Management*, 3rd ed. Irwin McGraw-Hill, 1999.
- [125] LANCE, G. N. e WILLIAMS, W. T. A general theory of classification sorting strategies: 1. hierarquical systems. *Computer Journal* 9 (1967), 373–380.

- [126] LAPORTE, G. Generalized subtour elimination constraints and connectivity constraints. *Journal of the Operational Research Society* 37 (1986), 509–514.
- [127] LAPORTE, G. Location-routing problems. In *Vehicle Routing: Methods and Studies* (North Holland, 1988), B. L. Golden e A. A. Assad, Eds., Elsevier Sciences Publishers B. V., pp. 163–197.
- [128] LAPORTE, G. A survey of algorithms for location-routing problems. *Investigación Operativa* 1, 2 (1989), 93–123.
- [129] LAPORTE, G. The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research* 59 (1992), 345–358.
- [130] LAPORTE, G. e DEJAX, P. J. Dynamic location-routing problems. *Journal of the Operational Research Society* 40, 5 (1989), 471–482.
- [131] LAPORTE, G., LOUVEAUX, F. e MERCURE, H. Models and exact solutions for a class of stochastic location-routing problems. *European Journal of Operational Research* 39 (1989), 71–78.
- [132] LAPORTE, G. e NOBERT, Y. An exact algorithm for minimizing routing and operating costs in depot location. *European Journal of Operational Research* 6 (1981), 224–226.
- [133] LAPORTE, G. e NOBERT, Y. Exact algorithms for the vehicle routing problem. *Annals of Discrete Mathematics* 31 (1987), 147–184.
- [134] LAPORTE, G., NOBERT, Y. e ARPIN, D. An exact algorithm for solving a capacited location-routing problem. *Annals of Operations Research* 6 (1986), 293–310.
- [135] LAPORTE, G., NOBERT, Y. e PELLETIER, P. Hamilton location problems. *European Journal of Operational Research* 12 (1983), 82–89.
- [136] LAPORTE, G., NOBERT, Y. e TAILLEFER, S. Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems. *Transportation Science* 22, 3 (1988), 161–172.
- [137] LAWLER, E. L., LENSTRA, J. K., RINNOY KAN, A. H. G. e SHMOYS, D. B., Eds. *The Traveling Salesman Problem - A Guided Tour of Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, New York, 1985.
- [138] LAWRENCE, R. M. e PENGILLY, P. J. The number and location of depots required for handling products for distribution to retail stores in south-east england. *Operational Research Quarterly* 20, 1 (1969), 23–32.

- [139] LEE, Y., KIM, S.-I., LEE, S. e KANG, K. A location-routing in designing optical internet access with WDM systems. *Photonic Network Communications* 6, 2 (2003), 151–160.
- [140] LENSTRA, J. e RINNOY KAN, A. Complexity of vehicle routing and scheduling problems. *Networks* 11 (1981), 221–227.
- [141] LEVY, L. e BODIN, L. The arc oriented location routing problem. *INFOR* 27, 1 (1989), 74–94.
- [142] LIN, S. Computer solutions of the TSP. *Bell Systems Technical Journal* 44 (1965), 2245–2269.
- [143] LIST, G. F. e MIRCHANDANI, P. B. An integrated network/planar multiobjective model for routing and siting for hazardous materials and wastes. *Transportation Science* 25, 2 (1991), 146–156.
- [144] LIST, G. F., MIRCHANDANI, P. B., TURNQUIST, M. A. e ZOGRAFOS, K. G. Modeling and analysis for hazardous materials transportation: Risk analysis, routing/scheduling and facility location. *Transportation Science* 25, 2 (1991), 100–114.
- [145] MADSEN, O. B. G. Methods for solving combined two level location-routing problems of realistic dimensions. *European Journal of Operational Research* 12 (1983), 295–301.
- [146] MADSEN, O. B. J. A survey of methods for solving combined location-routing problems. In *Scientific Management of Transport Systems* (Amsterdam, Holland, 1981), N. K. Jaiswal, Ed., North-Holland, pp. 194–201.
- [147] MARANZANA, F. E. On the location of supply points to minimize transportation costs. *IBM systems Journal* 2 (1963), 129–135.
- [148] MARANZANA, F. E. On the location of supply points to minimize transport costs. *Operations Research Quarterly* 15 (1964), 261–270.
- [149] MARKS, D. H. e STRICTER, R. Routing for public service vehicles. *Journal of the Urban Planning and Development Division* 97 (1971), 165–178.
- [150] MELNYK, S. A. e DENZLER, D. R. *Operations Management: A Value-Driven Approach*. Irwin, McGraw-Hill, Boston, 1996.
- [151] MERCER, A., CANTLEY, M. F. e RAND, G. K. *Operational Distribution Research: Innovative Case Studies*. Taylor and Francis, London, 1978.
- [152] MERCER, A. e RAND, G. A structure for distribution studies. *European Journal of Operational Research* 1 (1977), 161–168.

- [153] MILLIGAN, G. W. A monte-carlo study of 30 internal criterion measures for cluster-analysis. *Psychometrika* 46 (1981), 187–195.
- [154] MILLIGAN, G. W. e SCHILLING, D. A. Asymptotic and finite-sample characteristics of four external criterion measures. *Multivariate Behavioral Research* 20 (1985), 97–109.
- [155] MIN, H. The multiple vehicle routing problem with simultaneous delivery and pick-up points. *Transportation Research - A* 23A, 5 (1989), 377–386.
- [156] MIN, H. Consolidation terminal location-allocation and consolidated routing problems. *Journal of Business Logistics* 17, 2 (1996), 235–263.
- [157] MIN, H., CURRENT, J. e SHILLING, D. The multiple depot vehicle routing problem with backhauling. *Journal of Business Logistics* 23, 1 (1992), 259–288.
- [158] MIN, H., JAYARAMAN, V. e SRIVASTAVA, R. Combined location-routing problems: A synthesis and future research directions. *European Journal of Operational Research* 108 (1998), 1–15.
- [159] MIRCHANDANI, P. B. e FRANCIS, R. L. *Discrete Location Theory*. John Wiley and Sons, Inc, New York, 1990.
- [160] MOJENA, R. Hierarchical grouping methods and stopping rules: An evaluation. *Computer Journal* 20 (1975), 359–363.
- [161] MULVEY, J. M. e BECK, M. P. Solving capacitated clustering problems. *European Journal of Operational Research* 18 (1984), 339–348.
- [162] MURTY, K. G. e DJANG, P. A. The US army national guard’s mobile training simulators location and routing problem. *Operations Research* 47, 2 (1999), 175–182.
- [163] NAGY, G. *Nested Heuristic Approaches for the Combined Location Routing Problem*. PhD thesis, Birmingham University, 1996.
- [164] NAGY, G. e SALHI, S. Nested heuristic methods for the location-routeing problem. *Journal of the Operational Research Society* 47 (1996), 1166–1174.
- [165] NAGY, G. e SALHI, S. A nested location-routing heuristic using route length estimation. *Studies in Location Analysis* 10 (1996), 109–127.
- [166] NAGY, G. e SALHI, S. The many-to-many location-routing problem. *Top - Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa* 6, 2 (1998), 261–275.
- [167] NAMBIAR, J. *Location and Vehicle Routing in the Malaysian Rubber Industry*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgica, Fevereiro 1988.

- [168] NAMBIAR, J. M., GELDERS, L. F. e VAN WASSENHOVE, L. N. A large scale location-allocation problem in the natural rubber industry. *European Journal of Operational Research* 6 (1981), 183–189.
- [169] NAMBIAR, J. M., GELDERS, L. F. e VAN WASSENHOVER, N. Plant location and vehicle routing in the malasyan rubber smallholder sector: A case study. *European Journal of Operational Research* 38 (1989), 14–26.
- [170] NEEBE, A. W. e RAO, M. R. An algorithm for the fixed-charge assigning users to sources problem. *Journal of the Operational Research Society* 13, 11 (1983), 1107–1113.
- [171] NEUSCHEL, R. P. Physical distribution - forgotten frontier. *Harvard Business Review* (1967), 125–134.
- [172] NOZICK, L. K. e TURNQUIST, M. A. A two-echelon inventory allocation and distribution center location analysis. *Transportation Research Part E* 37 (2001), 425–441.
- [173] OR, I. *Traveling Salesman-Type Combinatorial Problems and their Relation to the Logistics of Regional Blood Banking*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois, August 1976.
- [174] OR, I. e PIERSKALLA, W. P. A transportation location-allocation model for regional blood banking. *AIIE Transactions* 11, 2 (1979), 86–95.
- [175] PAPADIMITRIOU, C. H. e STEIGLITZ, K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [176] PERL, J. *A Unified Warehouse Location-Routing Analysis*. PhD thesis, Northwestern University, Evanston - Illinois, Junho 1983.
- [177] PERL, J. e DASKIN, M. S. A unified warehouse location-routing methodology. *Journal of Business Logistics* 5, 1 (1984), 92–111.
- [178] PERL, J. e DASKIN, M. S. A warehouse location-routing problem. *Transportation Research B* 19B, 5 (1985), 381–396.
- [179] PERL, J. e SIRISOPONSILP, S. Distribution networks: Facility location, transportation and inventory. *International Journal of Physical Distribution and Materials Management* 18, 6 (1988), 18–26.
- [180] RAND, G. K. Methodological choices in depot location studies. *Operational Research Quarterly* 27, 1-ii (1976), 241–249.
- [181] RAPP, Y. Planning of exchange locations and boundaries in multi-exchange networks. *Ericsson Technics* 2 (1962), 91–113.

- [182] REVELLE, C., COHON, J. e SHOBRY, D. Simultaneous siting and routing in the disposal of hazardous wastes. *Transportation Science* 25, 2 (1991), 138–145.
- [183] ROMESBURG, H. C. *Cluster Analysis for Researchers*. Lifetime Learning Publications, Belmont, Canadá, 1984.
- [184] SALHI, S. *The Integration of Routing Into the Location-Allocation and Vehicle Fleet Composition Problems*. PhD thesis, University of Lencaster, 1987.
- [185] SALHI, S. e FRASER, M. An integrated heuristic approach for the combined location vehicle fleet mix problem. *Studies in Locational Analysis* 8 (1996), 3–21.
- [186] SALHI, S. e NAGY, G. Consistency and robustness in location-routing. *Studies in Locational Analysis* 13 (1999), 3–19.
- [187] SALHI, S. e RAND, G. K. Improvements to vehicle routing heuristics. *Journal of the Operational Research Society* 38 (1987), 293–295.
- [188] SALHI, S. e RAND, G. K. The effect of ignoring routes when locating depots. *European Journal of Operational Research* 39 (1989), 150–156.
- [189] SCHRAGE, L. Formulation and structure of more Complex/Realistic routing and scheduling problems. *Networks* 11 (1981), 229–232.
- [190] SERRA, D. Logistics costs in location models. Comunicação apresentada no EWGLA 14, XIV Meeting of the European Working Group on Locational Analysis, Setembro 2003, Corfu, Grécia., Setembro 2003.
- [191] SHAPIRO, D. *Algorithms for the Solution of the Optimal Cost Traveling-Salesman Problem*. PhD thesis, Washington University, St. Louis, 1966.
- [192] SHAPIRO, R. D. Get leverage from logistics. *Harvard Business Review* (May-Jun. 1984), 119–126.
- [193] SHARMAN, G. The rediscovery of logistics. *Harvard Business Review* (Sep.-Oct. 1984), 71–79.
- [194] SHOBRY, D. *A Model for Selection of Shipping Routes and Storage Locations for Hazardous Substance*. PhD thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, 1981.
- [195] SIMCHI-LEVI, D. The capacited traveling salesman location problem. *Transportation Science* 25, 1 (1991), 9–18.
- [196] SIMCHI-LEVY, D. e BERMAN, O. A heuristic algorithm for the traveling salesman location problem on networks. *Operations Research* 36, 3 (1988), 478–484.

- [197] SRIVASTAVA, R. *Algorithms for Solving the Location-Routing Problem*. Phd dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1986.
- [198] SRIVASTAVA, R. Alternate solutions procedures for the location-routing problem. *OMEGA International Journal of Management Sciences* 21, 4 (1993), 497–506.
- [199] SRIVASTAVA, R. e BENTON, W. C. The location-routing problem: Considerations in physical distribution system design. *Computers and Operations Research* 17, 5 (1990), 427–435.
- [200] STOKX, C. F. M. e TILANUS, C. B. Deriving route lengths from radial distances: Empirical evidence. *European Journal of Operational Research* 50 (1991), 22–26.
- [201] STOWERS, C. L. e PALEKAR, U. S. Location models with routing considerations for a single obnoxious facility. *Transportation Science* 27, 4 (1993), 350–362.
- [202] SUSSAMS, J. E. *Industrial Logistics*. Gower Press, London, 1969.
- [203] SUSSAMS, J. E. *Efficient Road Transport Scheduling*. Gower Press, London, 1971.
- [204] THOMAS, J. Where the money is. *Distribution* (Julho 1997), 14–20.
- [205] TILMAN, F. The multiple terminal delivery problem with stochastic demands. *Transportation Science* 3 (1969), 192–204.
- [206] TUZUN, D. e BURKE, L. I. A two-phase tabu search approach to the location routing problem. *European Journal of Operational Research* 116 (1999), 87–99.
- [207] VAN ROY, T. J. Multi-level production and distribution planning with transportation fleet optimization. *Management Science* 35, 12 (1989), 1443–1453.
- [208] WARD, J. H. Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association* 58 (1963), 236–244.
- [209] WATSON-GANDY, C. e DOHRN, P. Depot location with van salesman – a practical approach. *OMEGA The International Journal of Management Science* 1, 3 (1973), 321–329.
- [210] WEBB, M. Cost functions in the locations of depots for multiple-delivery journeys. *Operational Research Quarterly* 19, 3 (1968), 311–321.
- [211] WEBER, A. *Theory of the Location of Industries*, 7 ed. The University of Chicago Press, Chicago, 1929.
- [212] WONG, D. W. S. e MEYER, J. W. A spatial decision support system approach to evaluate the efficiency of a meals-on-wheels program. *Professional Geographer* 45, 3 (1993), 332–341.

- [213] WREN, A. e HOLLIDAY, A. Computer scheduling of vehicles from one or more depots to a number of delivery points. *Operational Research Quarterly* 23 (1972), 333–345.
- [214] WU, T.-H., LOW, C. e BAI, J.-W. Heuristic solutions to multi-depot location-routing problems. *Computers and Operations Research* 29 (2002), 1393–1415.
- [215] ZOGRAFOS, K. G. e SAMARA, S. Combined location-routing model for hazardous waste transportation and disposal. *Transportation Research Record* 1245 (1989), 52–59.